

**THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS VII**

Spécialité:  
**Acoustique Physique**

Présentée par

**STEFAN CATHELIN**

Pour obtenir le grade de  
Docteur de l'UNIVERSITE PARIS VII

**INTERFEROMETRIE-SPECKLE ULTRASONORE :  
APPLICATION A LA MESURE D'ELASTICITE**

soutenue le 10 Novembre 1998

*devant le jury composé de:*

**Monsieur P. ALAIS**  
**Monsieur F. COHEN TENOUDJI**  
**Monsieur J-F. DE BELLEVAL**  
**Monsieur M. FINK**  
**Monsieur G. GIMENEZ**  
**Monsieur P. LAUGIER**  
**Monsieur F. PATAT**  
**Monsieur F. WU**

**Rapporteur**

**Rapporteur**

# TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>I. ETAT DE L'ART</b>	
<b>1. Position du problème : échelle d'élasticité</b>	<b>3</b>
<b>2. Deux techniques ultrasonores : élastographie et sonoélasticité</b>	<b>4</b>
Une méthode statique : l'élastographie.	5
Une méthode dynamique : la sonoélasticité	7
Comparaison entre sonoélasticité et élastographie	10
<b>3. Conclusion</b>	<b>10</b>
<b>II- UNE METHODE D'INVESTIGATION : L'INTERFEROMETRIE SPECKLE ULTRASONORE</b>	
<b>1 Matériel et montage expérimental</b>	<b>13</b>
Les moyens mis en oeuvre	13
Le matériau : un gel d'agar-gélatine	14
Montage et principe général d'une expérience	15
<b>2 Description sommaire de la diffusion et du speckle ultrasonore</b>	<b>16</b>
Origine du Speckle	16
Volume isochrone et signature acoustique	17
<b>3 L'algorithme fondamental : l'intercorrélation</b>	<b>19</b>
Les trois phases du traitement de signal	19
Comparaison à l'interférométrie en optique	25
<b>4 Limite de la méthode</b>	<b>26</b>
Formule de Cramér-Rao Lower Bound (CRLB)	26
L'optimisation des paramètres	27
Origines de la décorrélation	28

Filtre de déformation	29
Tableau récapitulatif	30
Remarques	31
Conclusion du chapitre	32

### **III-ETUDE DES DEPLACEMENTS SUR L'AXE DU VIBREUR**

<b>1- Mouvement de tissus induits par un train d'onde sinusoïdale</b>	<b>35</b>
<b>2- Détection de l'onde de cisaillement sur le déplacements</b>	<b>37</b>
<b>3-Vitesse des ondes de cisaillement</b>	<b>38</b>
Vitesse des ondes de cisaillement à une fréquence	38
Vitesse des ondes de cisaillement à plusieurs fréquences	39
Un modèle rhéologique simple : le solide de Voigt	42
Transformation isotherme ou adiabatique?	45
Effet de diffraction sur la dispersion	46
<b>4-Atténuation des ondes de cisaillement</b>	<b>49</b>
Atténuation à une fréquence	50
Calcul de la fonction de Green	51
Fonction de Green dans divers solides	53
Approximation de la fonction de Green dans les tissus biologiques : une solution analytique à une excitation monochromatique	57
Champ proche-champ intermédiaire-champ lointain	60
Interférences entre onde de compression et onde de cisaillement	63
Résumé et conséquences	66
<b>5- L'élastographie impulsionnelle</b>	<b>67</b>
Mouvement de tissus induit par un « coup » acoustique.	67
<b>6- Application de l'élastographie impulsionnelle à un muscle et à un produit laitier</b>	<b>70</b>

<b>CONCLUSION</b>	<b>79</b>
<b>IV- CARTOGRAPHIE DES DEPLACEMENTS</b>	
<b>1- Image d'un milieu hétérogène simple : un bicouche</b>	<b>79</b>
Montage expérimental	79
Déplacement dans un bicouche	80
Image de lenteurs	81
Ordre de grandeur d'élasticité	82
<b>2- Champ de déplacement et diagramme de directivité</b>	<b>83</b>
Montage expérimental	84
Ondes générées par une impulsion acoustique	85
Carte d'amplitude des ondes de compression et de cisaillement.	88
Diagrammes de directivité et fonctions de Green angulaires	90
Interprétations physiques des fonctions de Green	95
<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>98</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>101</b>
<b>Annexe A : Les fonctions de Green d'un piston</b>	<b>103</b>
<b>Annexe B : Fonction de Green impulsionnelle sur l'axe d'un piston</b>	<b>107</b>
<b>Annexe C : Expression Approchée de la fonction de Green sur l'axe d'un piston</b>	<b>109</b>
<b>Annexe D : Convolution de l'expression approchée de la fonction de Green avec une sinusoïde</b>	<b>112</b>
<b>Annexe E : Inversion des équations de la vitesse et de l'atténuation du modèle de Kelvin Voigt</b>	<b>113</b>

# INTRODUCTION

Le succès des ultrasons dans le domaine médical ou dans celui du contrôle non destructif doit beaucoup au faible coût des appareils échographiques, au caractère non invasif de ce rayonnement à faible intensité et également à la simplicité de cette technique. Elle consiste à interroger un milieu à l'aide d'une impulsion ultrasonore et à enregistrer les échos générés par des inhomogénéités. Celles-ci peuvent être des organes, des amas de graisse en médecine ou des défauts, des fractures en contrôle non destructif. Le signal rétrodiffusé est ensuite soumis à un traitement simple dans lequel son enveloppe est extraite. Une image peut alors être créée en codant en niveau de gris l'intensité des échos. Ce traitement de signal est efficace mais ne révèle qu'une partie des informations contenues dans le signal rétrodiffusé.

L'extraction de ces informations latentes est un vaste domaine de recherche qui comprend par exemple « la caractérisation tissulaire ultrasonore ». De nombreuses études ont été menées afin d'extraire des paramètres quantitatifs et ainsi déceler d'éventuelles anomalies tissulaires (exemple: atténuation du signal acoustique dans les tissus musculaires de malade atteint de la myopathie de Duchenne<sup>1</sup>). Cette recherche de *signatures acoustiques* des maladies se heurte à la complexité du processus d'interaction entre l'onde ultrasonore et les tissus biologiques.

Autre type d'information qui peut être extraite du speckle ultrasonore: la détection d'écoulement. Il peut être caractérisé par un outil ultrasonore qui équipe et complète bon nombre d'échographes classiques: la sonde Doppler. Cet appareil (le « 2 D Color Flow Imaging ») mesure la vitesse des écoulements liquides et se révèle particulièrement efficace dans le diagnostic des maladies cardio-vasculaires.

Cette thèse s'inscrit donc dans la lignée des disciplines dérivées de l'échographie qui, par le biais de traitements de signaux plus ou moins complexes, accèdent aux informations contenues dans les signaux ultrasonores rétrodiffusés, information *a priori* invisibles sur l'image échographique conventionnelle. Dans cette thèse, le but que nous nous sommes fixé est de mesurer globalement et si possible localement l'élasticité (le module d'Young) et la viscosité des tissus biologiques.

Actuellement, la mesure quantitative de l'élasticité dans les tissus biologiques est un objectif commun à deux techniques ultrasonores: l'élastographie et la sonoélasticité. La première est une méthode statique car elle mesure l'élasticité à partir d'états d'équilibre de déformation d'un

---

<sup>1</sup> G. Berger, *Caractérisation Tissulaire par Spectroscopie Ultrasonore in vivo. Un Champ d'Application: la Myopathie de Duchenne*, Thèse, Université Rene Descartes, Paris, Juin 1985.

échantillon. La seconde est une méthode dynamique; elle déduit l'élasticité de la propagation d'ondes acoustiques audiofréquences (de 10 à 500 Hz). Ces ondes de basse fréquence sont remarquables car elles se propagent à environ 5 m/s (il est possible de les observer à l'oeil nu à la surface de la peau). Des deux méthodes ultrasonores font l'objet d'une description détaillée dans le chapitre I. Mais c'est la sonoélasticité que nous étudions plus précisément dans la suite.

Le second chapitre décrit l'outil fondamental qui a permis les expériences présentées dans ce manuscrit: la sonde à *interférométrie speckle ultrasonore*. Elle permet, à partir du speckle ultrasonore, de mesurer des déplacements de l'ordre du micromètre, largement inférieurs à la longueur d'onde ultrasonore (300  $\mu\text{m}$ ). La limite sur la précision de ces mesures dépend, pour une large part, de la nature du speckle ultrasonore que nous décrirons donc brièvement. Les paramètres les plus influents sont rassemblés dans un tableau récapitulatif en fin de chapitre.

Les ondes de basse fréquence sont générées au moyen d'un piston. Dans le chapitre III, nous étudions les phénomènes ondulatoires sur l'axe du piston dans des milieux viscoélastiques homogènes. Avec cette configuration simple, nous mettons en évidence certains biais sur les mesures expérimentales de vitesses et d'atténuations effectuées en sonoélasticité. La comparaison des modes de vibrations stationnaires, transitoires et impulsionnels du piston permet de resituer ces ondes dans le cadre d'une théorie globale de diffraction dans les solides. Les paramètres viscoélastiques non biaisés sont alors mesurés par une méthode ultrasonore baptisée *élastographie impulsionnelle*.

Les cartographies présentées au chapitre IV posent le problème des ondes de basse fréquence dans les milieux inhomogènes d'une part et celui du champ de déplacement d'un piston d'autre part. Une expérience préliminaire de mesure locale de l'élasticité (et donc d'imagerie) est présentée en première partie du chapitre. Dans la seconde partie, le champ de déplacement jusqu'alors étudié sur l'axe est mesuré dans tout le demi espace solide. Ces résultats sont comparés aux diagrammes de directivité théoriques des ondes de basse fréquence.

Ce travail fait donc appel à des notions de traitement de signal, d'acoustique, de physique ondulatoire et également de rhéologie dans le chapitre III. Les calculs mathématiques sont réunis en annexe.

## I. ETAT DE L'ART

*La « dureté » ou la « fermeté » des tissus biologiques est un paramètre clinique important. Par exemple la cirrhose se traduit mécaniquement par une fermeté anormale du foie. Pourtant, aucun système d'imagerie médicale ne fournit de mesure quantitative de l'élasticité telle qu'elle est perçue lors de palpations cliniques. Certes il existe en rhéologie des appareils de mesure d'élasticité mais ils nécessitent l'extraction d'un échantillon. Le but commun que se sont assignées les deux méthodes ultrasonores que sont l'élastographie et la sonoélasticité, est de mesurer de façon non destructive cette élasticité. Après avoir défini clairement l'élasticité dont il est question ici, ce chapitre décrit ces deux méthodes. Elles reposent sur des interprétations totalement différentes de la palpation: l'élastographie modélise la palpation par un écrasement statique des tissus et la sonoélasticité par des oscillations de basse fréquence.*

### 1. POSITION DU PROBLEME: ECHELLE D'ELASTICITE.

La radiologie et la R.M.N. sont des techniques d'imagerie directement reliées aux propriétés atomiques ou moléculaires des tissus. L'échographie ultrasonore sonde les tissus à une autre échelle car elle sollicite l'élasticité de groupements atomiques ou moléculaires. Pour une fréquence ultrasonore typique dans le domaine médical de 3 MHz, la longueur d'onde est de 0,5 mm. Par conséquent, ces ultrasons révèlent l'organisation de la structure des tissus biologiques à l'échelle du mm. Pour autant, les ondes ultrasonores mettent en jeu, lors de leur propagation, un module élastique dont la dynamique n'est pas perceptible par nos sens: c'est la compressibilité. En effet, il est difficile par palpation de distinguer l'argent de l'aluminium bien que les ultrasons s'y propagent à des vitesses qui varient du simple au double (respectivement 3650 et 6420 m/s). Au contraire, les muscles et l'eau si différents au toucher sont des milieux pratiquement équivalents en ce qui concerne la célérité des ultrasons (environ 1500m/s). En réalité, la palpation permet d'évaluer le module d'Young,

$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ . Cette formule fait apparaître les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  qui sont

respectivement l'élasticité de compression et l'élasticité de cisaillement. L'expression du module

d'Young donne le plus de poids à l'élasticité la plus faible à savoir  $\mu$ . Dans le cas extrême où  $\lambda \gg \mu$  comme dans les milieux biologiques ( $\lambda = 2,6 \cdot 10^9$  Pa,  $\mu = 2,5 \cdot 10^3$  Pa), le module d'Young est donné par  $E = 3\mu$ . Il est donc piloté par l'élasticité de cisaillement. Comme le cisaillement est très faible dans l'eau mais pas dans les muscles, la sensation de résistance est radicalement différente. Or, les paramètres que sont l'élasticité et la viscosité de cisaillement sont mis en jeu lors de la propagation des ondes de cisaillement. Leur étude peut donc permettre de quantifier des informations tactiles jusqu'alors obtenues par « savoir faire ». C'est le cas dans le domaine médical avec les palpations mais aussi dans le domaine agro-alimentaire (choix de fromages selon leur *moelleux*, sélection de quartier de viande en fonction de leur *tendreté*...). Cette onde de cisaillement révèle donc l'élasticité à l'échelle humaine. Dans le domaine médical, la palpation permet de dépister certains cancers du sein. En effet, les tissus cancéreux se développent sous forme de nodules "durs". Ce sont ces nodules que le médecin cherche à sentir lors d'une séance de palpation. Les ultrasons sensibles aux inhomogénéités d'impédance ne révèlent pas systématiquement ces nodules. Il n'existe pas de corrélation directe entre rupture d'élasticité de cisaillement et rupture d'impédance.

Afin de remplacer le contrôle tactile par une palpation quantitative, deux méthodes ultrasonores ont vu le jour: l'élastographie et la sonoélasticité. La première est une méthode statique car elle utilise les ultrasons pour caractériser les déformations statiques de la matière. Ces déformations sont induites depuis la surface par un piston qui applique une contrainte statique. La seconde méthode (la sonoélasticité) est une méthode dynamique car elle utilise les ultrasons pour détecter des ondes de basse fréquence. Ces ondes sont générées depuis la surface par un piston qui impose des vibrations audiofréquences.

## **2. DEUX TECHNIQUES ULTRASONORES : ELASTOGRAPHIE ET SONOELASTICITE.**

L'élastographie est la première technique ultrasonore qui a permis d'obtenir l'image quantitative de l'élasticité des milieux biologiques comme la viande [1]. Elle repose sur l'intuition suivante: lorsque la matière est faiblement comprimée, les zones tendres se déforment plus que les zones dures. La mesure des déformations permet donc d'accéder à la raideur ou à l'élasticité de la matière. La sonoélasticité est une méthode voisine qui vise le même but: dresser une carte quantitative de l'élasticité des milieux biologiques. L'idée est de soumettre l'échantillon non pas à une compression comme en élastographie mais à des vibrations mécaniques de 10 à 500 Hz. La réponse



de la matière à ces sollicitations mécaniques dépend des propriétés viscoélastiques locales. Jusqu'à maintenant seule l'évaluation globale de l'élasticité a pu être menée à bien avec cette méthode [2]. Pour ces deux méthodes, les ultrasons sont couplés à une action mécanique statique dans le cas de l'élastographie et à une action mécanique dynamique dans le cas de la sonoélasticité.

### **Une méthode statique: l'élastographie.**

Quand un tissu est mécaniquement soumis à une compression quasi-statique, les contraintes internes sont définies par les conditions aux frontières et par les propriétés intrinsèques du tissu [3]. Les déformations engendrées par ces contraintes peuvent être évaluées par ultrasons lorsque le milieu exploré est diffusant. Il s'agit d'un milieu dans lequel une impulsion ultrasonore rencontre sur son chemin des inhomogénéités d'impédance susceptibles de créer une impulsion retour. Le jeu complexe d'interférences de ces ondes réfléchies forme le «speckle acoustique».

Afin de caractériser complètement les propriétés élastiques locales d'un volume, il est nécessaire de connaître à la fois la carte des contraintes et celle des déformations. Ces grandeurs, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, sont reliées localement par la loi de Hooke:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \quad (1)$$

$E$  est le module d'Young,  $\sigma_{11}$  est la contrainte selon une direction et  $\varepsilon_{11}$  la déformation selon la même direction. Le module d'Young<sup>1</sup> est donc le rapport d'une contrainte longitudinale sur une déformation longitudinale.

La carte des déformations qui constitue le premier volet de la connaissance de l'élasticité du milieu, est évaluée expérimentalement par une méthode d'intercorrélation des lignes échographiques. Cette méthode fait l'objet d'une explication détaillée dans le chapitre II. On peut la résumer rapidement de la manière suivante: une compression statique (faible) d'un échantillon induit des déplacements relatifs des inhomogénéités ce qui a pour effet de modifier le speckle acoustique. A partir de ces modifications, un traitement de signal fondé sur l'intercorrélation de signaux ultrasonores consécutifs (speckle) permet de calculer les déplacements relatifs de ces inhomogénéités pour ensuite remonter aux déformations locales du matériau.

L'étude du champ de contraintes qui constitue le second volet de la connaissance de l'élasticité demeure à ce jour le problème le plus délicat dans l'élaboration d'*élastogrammes* (images de

l'élasticité). Dans le cas simple d'un compresseur circulaire de rayon «  $a$  » appliquant une charge sur un milieu homogène infini, la réponse à ce problème dit «de Boussinesq» a été calculée analytiquement par Saada [4]; la solution au premier ordre s'exprime par :

$$\sigma(z) = \sigma(0) \cdot \left| \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^{3/2}} - 1 \right| \quad (2)$$

$\sigma(z)$  représente la contrainte en fonction de la profondeur,  $\sigma(0)$  la contrainte appliquée à la surface,  $a$  le rayon du compresseur et  $z$  la profondeur.

On peut noter trois choses concernant ce modèle simple: il prédit bien les contraintes lorsque les déformations locales maximum sont inférieures à 2% et il s'adapte facilement au cas où deux compresseurs sont placés en vis à vis [5]. Mais dans la pratique, les conditions expérimentales ne sont jamais aussi simples. L'équation (2) constitue donc une solution à un problème académique simple mais ne peut pas s'appliquer dans le cadre d'une imagerie *in vivo*.

Certes les progrès de l'informatique et des calculs aux éléments finis permettent de déterminer le champ de contrainte dans tout le volume d'un échantillon, encore faut-il connaître parfaitement les conditions aux frontières. Or les milieux biologiques offrent le plus souvent des conditions aux frontières très complexes (présence d'organes, d'os...). Cette complexité constitue un obstacle à la connaissance du champ de contrainte.

Pour remédier au problème posé par la connaissance du champ de contrainte, la plupart des auteurs ont choisi d'utiliser un compresseur de grande taille par rapport aux dimensions de l'échantillon. Dans ce cas, l'espoir est d'appliquer un champ de contrainte constant en première approximation; en effet, dans le cas limite où  $a \gg z$ , la contrainte donnée par l'équation (2) tend bien vers  $\sigma(0)$ . L'information de la contrainte (constante dans tout l'espace) combinée à celle de la déformation locale est utilisée pour créer une image quantitative du module élastique local (élastogramme) [6]. L'inconvénient de cette méthode est la présence d'artefacts sur les images à cause de l'approximation qui consiste à supposer le champ de contrainte constant. Certains auteurs comme O'Donnell [7] ou Skovoroda [8] choisissent d'étudier et d'analyser l'image des déformations. Enfin, il faut signaler l'existence d'une littérature abondante, [9], [10] sur le problème inverse en élastographie. Le but est d'obtenir une carte d'élasticité à partir de la connaissance des déformations

---

<sup>1</sup> D'un point de vue macroscopique, le module d'Young mesuré par les rhéomètres correspond à une configuration d'expérience précise. Le matériau est taillé en forme de cylindre et posé sur une de ses faces planes. Une déformation est appliquée sur l'autre face et la résistance du matériau est mesurée.

et des conditions aux frontières. Là encore, de petites erreurs sur ces conditions peuvent conduire les algorithmes de reconstruction vers des distributions d'élasticité erronées.

En résumé, l'élastographie permet de mesurer le module d'Young  $E$  pour des milieux aux conditions aux frontières simples. Dans les expériences *in vivo*, les cartes de déformation ou d'élasticité doivent être comparées à des images échographiques classiques pour permettre au manipulateur de sélectionner les informations pertinentes et d'écarter les éventuels artefacts.

### Une méthode dynamique: la sonoélasticité

Une seconde approche développée entre autres par Sato [19], Parker [2], Greenleaf [11] et nous même [12] repose sur l'étude des vibrations internes de basses fréquences (de 10 à 500 Hz) des tissus biologiques. Ces vibrations caractérisent les propriétés mécaniques du milieu. Elles sont générées en appliquant depuis la surface des mouvements sinusoïdaux de basse fréquence, au moyen d'un piston. Selon les auteurs, les techniques de mesure des déplacements ainsi que le choix des paramètres diffèrent. Parker mesure les déplacements induits par ces vibrations internes à partir des distorsions fréquentielles des signaux acoustiques par effet Doppler [13]. Les déplacements induits par les vibrations se traduisent par une modification du contenu spectral de l'onde ultrasonore. La vitesse de déplacement des mouvements de tissu est mesurée et reliée plus ou moins simplement à la raideur du milieu (ou à son élasticité).

Le terme de «sonoélasticité» créé par Parker [14] désigne la technique qui couple à la fois les vibrations mécaniques et le système d'imagerie ultrasonore Doppler. Toutefois nous rassemblons dans le paragraphe *sonoélasticité* l'ensemble des méthodes dynamiques pour lesquelles les vibrations mécaniques sont employées comme moyen d'investigation.

Si Parker et Lerner [15] dressent directement une carte des vitesses de vibrations de tissu, Yamakoshi en revanche s'appuie sur une carte des amplitudes et une carte des phases<sup>2</sup> pour mettre à jour les zones d'élasticités singulières [19]. Par une méthode d'interférométrie laser Doppler, Fuji est parvenu pour plusieurs fréquences à mesurer la vitesse de propagation de ces ondes de basse fréquence [16]. Enfin, il relie la dispersion de la vitesse à l'élasticité de cisaillement. Dutt, en utilisant

---

<sup>2</sup> Par un traitement de signal basé sur le développement en série de Fourier-Bessel du signal ultrasonore retour, on peut extraire la phase de l'onde basse fréquence et son amplitude avec une précision de 10  $\mu\text{m}$  pour des fréquences supérieures à 500Hz. Cette précision décroît avec la fréquence et n'est plus que de 1 mm à 20Hz.

une méthode de quadrature de phase sur les signaux échographiques, a lui aussi mesuré la vitesse des ondes de cisaillement de 200 à 500 Hz sans toutefois en déduire l'élasticité [11].

Muthupillari utilise la résonance magnétique nucléaire (RMN) [17] pour calculer les déplacements. La RMN donne des résultats très satisfaisants car la précision sur les déplacements est inférieure à 200 nm, et bien qu'elle soit onéreuse et difficile à mettre en oeuvre, cette méthode semble très prometteuse (voir l'encadré pour les détails). Quoi qu'il en soit, Muthupillari mesure la vitesse  $C_S$  des ondes de cisaillement<sup>3</sup> et à partir de la formule classique de ce type d'onde dans les solides élastiques, il détermine l'élasticité globale de cisaillement  $\mu$ :

$$\mu = \rho \ c_S^2 \quad (3)$$

$\lambda_S$  est la longueur d'onde de cisaillement et  $\rho$  est la masse volumique du milieu. Dans cette expression, les phénomènes de viscosité sont négligés.

La RMN, les techniques Doppler et la technique de quadrature de phase mesurent les déplacements induits par une excitation harmonique. Les mesures s'effectuent donc en régime stationnaire. Cela signifie, dans le cas d'un milieu fini, qu'il se crée un système de modes propres, des modes de vibrations qui tiennent compte à la fois des paramètres physiques du milieu et des conditions aux frontières. Parker a ainsi montré qu'une modification de l'élasticité de la cornée change les fréquences propres de vibration de l'oeil [18]. Cependant ces modes propres rendent très difficiles toute mesure quantitative. Par conséquent, comme pour l'élastographie, la sensibilité de cette méthode aux conditions aux frontières pose le problème de l'interprétation des cartes de vitesse particulière, d'amplitude ou de phase.

---

<sup>3</sup> Dans le manuscrit, les ondes de compression sont notées P (premier) et les ondes de cisaillement S (second). Les ondes de compression se propagent en effet plus vite que les ondes de cisaillement.

**Sonoélasticité par résonance magnétique nucléaire**

Les spins des noyaux d'hydrogène dans les milieux biologiques ont une orientation aléatoire. Ils ne présentent donc pas naturellement d'aimantation macroscopique. Placés dans une induction magnétique  $B_0$ , les spins des noyaux tendent à s'orienter parallèlement à  $B_0$  avec un taux proportionnel à son intensité très faible ( $10^{-6}$  dans un champ de l'ordre du tesla à température ambiante). Les spins sont alors animés d'un mouvement de précession autour de la direction d'aimantation macroscopique avec une fréquence propre  $\omega_0$  proportionnelle à l'intensité du champ magnétique extérieur  $B_0$  (dans un champ de 1 tesla, cette fréquence de précession vaut 42 MHz pour les protons). Une expérience de RMN consiste à appliquer une impulsion d'onde radiofréquence (RF) superposée au champ principal  $B_0$ . Si la fréquence de l'onde RF est égale à la fréquence de précession  $\omega_0$ , les spins nucléaires basculent et reviennent à leur position d'origine en émettant des signaux électromagnétiques de fréquence  $\omega_0$ . Dans le cadre d'une description quantique, ce signal correspond à un retour à l'état d'équilibre d'une population de protons distribuée entre deux niveaux d'énergie Zeeman. Ce signal est détecté par un résonateur accordé à cette fréquence. L'amplitude de ce signal est proportionnel à la densité d'aimantation donc de proton. Une image RMN est construite en observant séquentiellement la résonance magnétique en différents points du volume étudié. Le principe consiste à superposer au champ magnétique  $B_0$  un gradient de champ selon une direction  $x$ . Pour une fréquence  $\omega_0$  fixe, seuls les spins localisés dans une tranche autour d'un point  $x_0$  participent au signal reçu par le résonateur, les autres restent neutres car ils ne sont pas « à résonance ». En jouant sur une séquence de gradient dans plusieurs directions, on parvient à isoler l'image d'un très petit domaine. L'image globale est reconstituée point par point par un traitement informatique.

En sonoélasticité, les mouvements sinusoïdaux qui agitent la matière donnent lieu à une modification de la phase des signaux électromagnétiques émis par les spins résonnants. Cette phase est donnée par (4):

$$\Phi = \gamma \int_0^\tau G_r(t) r(t) dt \quad (4)$$

$\gamma$  est le moment magnétique du proton,  $\tau$  est le temps pendant lequel est appliqué le gradient de champ magnétique  $G_r(t)$  superposé au champ magnétique statique  $B_0$  et  $r(t)$  est une fonction qui décrit la position des spins nucléaires en fonction du temps. La modification de la phase entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  contient l'information sur les déplacements  $r(t_2) - r(t_1)$  d'une zone donnée.

Cette méthode permet de mesurer des déplacements inférieurs à 200 nm à des fréquences comprises entre 20 et 1000 Hz. Pourtant, parce que la RMN n'est pas un système d'imagerie en temps réel, les mouvements détectables par cette méthode ne peuvent qu'être cycliques (vibration sinusoïdale). En effet l'acquisition des images est limitée par le temps de relaxation des protons d'environ 1 seconde (temps mis par les protons pour recouvrer l'état d'équilibre). Bien qu'elle soit plus précise, cette méthode se heurte aux mêmes difficultés que l'élastographie ou que la sonoélasticité: la sensibilité aux conditions aux frontières. Cet obstacle comme nous le montrons dans la suite de ce manuscrit, peut être surmonté en utilisant des modes de vibration pulsés. Lorsque la RMN temps réel sera un outil domestiqué (pour l'instant le rafraîchissement d'image le plus rapide atteint 1,5 s [J. Kettenbach, R. Kikinis and F. A. Jolesz, "Interventional MRI: From Image Guided Biopsy to Therapy", Medical Imaging International, **8**, N°1 (1998). ]), il sera possible d'évaluer précisément les déplacements dus à la propagation d'ondes impulsionnelles de basse fréquence et donc de dresser des cartes précises d'élasticité.

### **Comparaison entre sonoélasticité et élastographie**

L'élastographie et la sonoélasticité sont des méthodes ultrasonores qui concernent les milieux diffusants pour lesquels l'évolution temporelle du speckle acoustique permet de mesurer les déplacements. L'élastographie (méthode statique) et la sonoélasticité (méthode dynamique) peuvent être considérées comme deux variantes d'une même méthode d'investigation. Elles utilisent toutes les deux conjointement les ultrasons et l'application d'une contrainte extérieure; ces contraintes s'effectuent à des gammes de fréquence différentes; 0 Hz pour l'élastographie (méthode statique) et de 50 à 500 Hz pour la sonoélasticité (méthode dynamique).

Dans la littérature, il existe peu de mesures quantitatives d'élasticité obtenues par l'une ou l'autre de ces méthodes. En sonoélasticité *in vivo*, Sato a effectué des mesures cliniques de raideur sur des cuisses [19] et Kazakov & Klochkov [20], à partir d'ondes de surface sur le bras, ont évalué l'élasticité et la viscosité. En élastographie il faut signaler l'article d'Ophir [1] qui montre des élastogrammes de fantômes, et celui de Chen [21] qui a mesuré l'élasticité dans des muscles et dans des foies. Ce dernier compare ensuite ses résultats aux mesures rhéologiques obtenues avec un INSTRON<sup>4</sup>. Quelle que soit la technique utilisée, l'erreur relative de ces mesures excède 20%.

### **3. CONCLUSION**

Elastographie et sonoélasticité sont deux techniques ultrasonores qui présentent l'inconvénient d'être sensibles aux conditions aux frontières. Le champ des déformations statiques dans le cas de l'élastographie ou le champ des déplacements dynamiques dans le cas de la sonoélasticité dépendent fortement des conditions aux frontières. Elles se manifestent sous la forme d'artefacts sur les images d'élasticité.

Les travaux effectués pendant cette thèse ont été orientés vers les méthodes dynamiques comme la sonoélasticité. Un des objectifs était de mieux comprendre le comportement des ondes de cisaillement dans les solides *mous* comme les tissus biologiques. Ce comportement dépend à la fois des paramètres rhéologiques et des paramètres « ondulatoires » du milieu (conditions aux frontières).

L'accès aux paramètres rhéologiques d'un milieu passe donc par la maîtrise des paramètres ondulatoires. C'est à cette étude qu'est consacré le reste du manuscrit.

---

<sup>4</sup> INSTRON. Marque d'appareils qui permettent de mesurer l'élasticité d'un échantillon de matière en caractérisant sa résistance à une pression ou à un étirement donné.

## REFERENCES

- 1 J. Ophir et al. « Elastography : a Quantative Method for Imaging the Elasticity of Biological Tissues » *Ultrasonic Imaging*, **13**, pp. 111-134 (1991).
- 2 K. J. Parker et al. « Tissue response to Mechanical Vibrations for Sonoelasticity Imaging » *Ultrasound in Med. & Biol.* **16**, No. 3, pp. 241-246 (1990).
- 3 J. Ophir et al. « Axial Stress Distribution Between Coaxial Compressors In Elastography : an Analitical Model » *Ultrasound in Med. & Biol.* **18**, No 8, pp. 667-673 (1992).
- 4 A. S. Saada, *Elasticity, Theory and applications*, New York: Pergamont Press, pp.395-428 (1974).
- 5 J. Ophir, I. Cespedes, H. Ponneanti, Y. Yazdi and X. Li, « Elastography: a Quantitative Method for Imaging The Elasticity of Biological Tissues », *Ultrasonic Imaging*, **13**, pp.111-134, (1991).
- 6 E. E. Konofagou, T. Varghese and J. Ophir, « Variable Compressions with RF and Baseband Processing for Dynamic Range Expansion of Elastograms », *J. Med. Ultrasonics*, **24**, N°5 (1997).
- 7 M.O'Donnell, A. R. Skovoroda, B. M. Shapo, S. Y. Emilianov, « Internal Displacement and Strain Imaging Using Ultrasonic Speckle Tracking », *IEEE Trans. UFFC*, **41**, n°3 (1994).
- 8 A. R. Skovoroda, S. Y. Emilianov, M. A. Lubinsky, A. P. Sarvazyan, M. O'Donnell, « Theoretical Analysis and Verification of Ultrasound Displacement and Strain Imaging », *IEEE Trans. UFFC*, **41**, n°3 (1994).
- 9 F. Kallel, M. Bertrand, J. Ophir and I. Cespedes, « Determination of Elasticity Distribution in Tissue from spatio-Temporal Changes in Ultrasound Signal », *Acoustical Imaging*, **21**, Edited by J. P. Jones, Plenum Press, New York (1995).
- 10 C. Sumi, A. Suzuki, K. Nakayama, « Estimation of Shear Modulus Distribution in Soft Tissue from Strain Distribution », *IEEE Trans. Biomed. Engin.*, **42**, N°2 (Fevrier 1995).
- 11 V.Dutt, R.R.Kinnick and J.F.Greenleaf, « Acoustic Shear Wave Displacement Measurement Using Ultrasound », *IEEE, Ultrasonic Symposium*, **2**, 1185-1188 (1996).
- 12 S. Catheline, F. Wu and M. Fink, « A Solution to Diffraction Bias in Sonoelasticity: The Acoustic Impulse Technique », *Soumis au JASA*, juin 1998.
- 13 K. J. Parker et al. « Sonoelasticity : Medical Elasticity Images Derived From Ultrasound Signals in Mechanically Vibrated Target » *Acoustical Imaging*, **16**, edited by L. W. Kessler, Plenum Publishing Corporation (1988).



- 14 K. J. Parker, R. M. Lerner, « Sonoelasticity of Organs: Shear Wave Ring a Bell », **11**, pp.387-392 (1992).
- 15 R. M. Lerner, S. R. Huang and K. J. Parker, « Sonoelasticity Images Derived from Ultrasound Signals in Mechanically Vibrated Tissues », *Ultrasound in Med. & Biol.*, **16**, N°3, pp.231-239 (1990).
- 16 K. Fuji, T. Sato, K. Kameyama, T. Inoue, K. Yokoyama and K. Kobayashi, « Imaging System of Precise Hardness Distribution in Soft Tissue In Vivo Using Forced Vibration and Ultrasonic Detection », *Acoustical Imaging*, **21**, Edited by J. P. Jones, Plenum Press, New York (1995).
- 17 R. Muthupillari, D.J.Lomas, P.J.Rossman, J.F.Greenleaf, A.Manduca, R.L.Ehman. « Magnetic Resonance Elastography by Direct Visualisation of Propagating Acoustic Strain Waves » *Science*, **269**, pp. 1854-1857, (Sept. 1995).
- 18 K. J. Parker et al. « Detection of Intraoculaire Pressure Change in a Human Eye Model Using Sonoelastic Doppler Ultrasound » *IEEE Ultrasonic Symposium* (1992).
- 19 Y. Yamakoshi, J. Sato and T. Sato « Ultrasonic Imaging of Internal Vibration of Soft Tissue under Forced Vibration », *IEEE Trans. UFFC*, **37**, No.2, pp.45-53 (1990).
- 20 V. Y. Kazakov and B. N. Klochkov. « Low Frequency Mechanical Properties of the Soft Tissue of the Human » *Biophysics*, **34**, No. 4, pp. 742-747 (1992).
- 21 E. J. Chen, J. Novakofski, W. K. Jenkins and W. D. O'Brien, « Young's Modulus Measurements of Soft Tissues with Application to Elasticity Imaging », *IEEE, UFFC*, **43**, N°1 (1996).

## II- UNE METHODE D'INVESTIGATION : L'INTERFEROMETRIE SPECKLE ULTRASONORE

*L'objectif de ces travaux de thèse est d'élaborer une méthode ultrasonore capable de déterminer le module élastique de cisaillement  $\mu_1$  (donc le module d'Young  $E$ ) et le module de viscosité de cisaillement  $\mu_2$  des tissus biologiques. La méthode que nous proposons consiste à générer au moyen d'un piston une onde de basse fréquence et à suivre, grâce aux ultrasons, la progression de cette onde. Sa vitesse et son atténuation sont reliées aux paramètres physiques du milieu. Cette méthode fait donc partie des méthodes dites dynamiques comme la sonoélasticité [1] puisqu'elle repose sur la caractérisation de la réponse des tissus biologiques à des sollicitations mécaniques de fréquences comprises entre 20 et 300 Hz. Pourtant, la détection des déplacements est assurée par un traitement de signal inspiré pour une large part par des algorithmes développés en élastographie (statique) par Ophir [2] : l'interférométrie speckle ultrasonore.*

*La difficulté que posent la détection et la mesure des déplacements tient aux faibles amplitudes des mouvements induits par les vibrations du piston. Typiquement, si l'amplitude des vibrations est de 1 mm en surface, les déplacements ne sont plus que de quelques micromètres à quelques centimètres de profondeur au sein de l'échantillon. A partir d'ultrasons de longueur d'onde d'environ 500  $\mu\text{m}$ , il est possible de mesurer des déplacements de l'ordre du micromètre. Les limites de cette méthode de traitement de signal sont discutées dans ce chapitre.*

### 1 MATERIEL ET MONTAGE EXPERIMENTAL

#### Les moyens mis en oeuvre

Le montage expérimental se compose de deux parties principales.

La partie génération des ondes e basse fréquence comprend un générateur de fonction HP 3314A et un pot vibrant Brüel&Kjaer type 4810. Le générateur de fonction est programmable. La

forme et l'amplitude du signal électrique reçu par le pot vibrant sont arbitraires. Les signaux utilisés dans les expériences présentées dans ce mémoire sont de trois types : sinusoïde monochromatique, train de sinusoïdes ou une impulsion de type Dirac. L'amplitude crête-crête des déplacements mécaniques que délivre le pot vibrant ne dépasse pas 1 mm. Le déclenchement des vibrations de basse fréquence est synchronisé avec le déclenchement des ultrasons.

La partie «ultrason » du montage utilise un transducteur ultrasonore en mode émission-réception. Il est focalisé à 4 cm de profondeur pour un diamètre de 12 mm. Sa fréquence centrale est de 3 MHz. L'acquisition des ondes ultrasonores est pilotée par une électronique fabriquée par la société CORELEC. Cette électronique permet d'enregistrer en 0,38 s (soit avec une fréquence de récurrence de 1300 Hz) 512 signaux échographiques de 2048 points stockés sur 2 octets. Ils sont échantillonnés à 40 MHz. La société Contrôle U.S. a fourni le logiciel MARCUS (Moteur Acquisition Réception Contrôle U.S.) qui permet notamment d'afficher en temps réel les signaux échographiques.

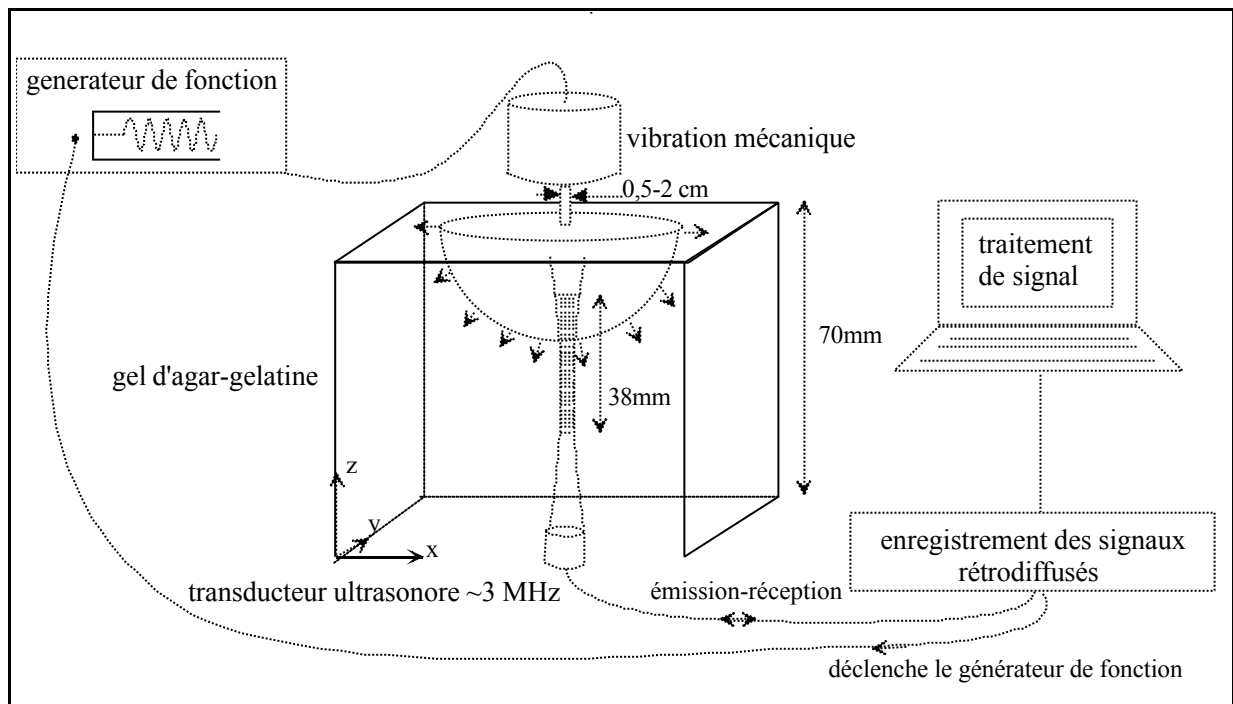
Les logiciels du traitement de signal LISU (Logiciel d'Interférométrie Speckle Ultrasonore), développés au laboratoire sous Windows, permettent, après la phase d'acquisition, de mesurer la vitesse et l'atténuation des ondes de basse fréquence ainsi que d'évaluer l'erreur dont sont entachés les résultats expérimentaux. Les détails de ce traitement de signal figurent au paragraphe II-3.

### **Le matériau : un gel d'agar-gélatine.**

Les expériences présentées dans ce mémoire sont effectuées en grande majorité sur des gels d'agar gélatine. Seules deux expériences du chapitre III portent sur un muscle de boeuf (*semi-membranosus*). Ces gels présentent l'intérêt d'être à la fois isotropes, homogènes, diffusants, viscoélastiques et linéaires en première approximation. (pour plus d'information se référer à l'article de C. L. de Korte [3]). Ce type de gel, facile à fabriquer en laboratoire, a des propriétés viscoélastiques proches de celles des tissus biologiques. Un gel est obtenu en mélangeant 3% d'agar à 6% de gélatine dans de l'eau tiède à 50°. Par un dosage de la gélatine, il est possible de contrôler l'élasticité de l'échantillon final. De plus, comme dans les tissus biologiques, les ultrasons sont diffusés au sein de ces gels car, contrairement à la gélatine qui fond vers 30°, l'agar en poudre reste solide jusqu'à 70°. Les grains d'agar font donc office de diffuseurs. Cette diffusion rend possible l'utilisation de l'interférométrie speckle ultrasonore.

### Montage et principe général d'une expérience

Un gel est placé entre le transducteur de 3 MHz et le piston d'un pot vibrant. Le faisceau ultrasonore et le pot vibrant sont placés en vis à vis sur le même axe. L'extrémité du pot vibrant est occupée par un piston dont la tête circulaire a un diamètre ajustable. Ce diamètre selon les expériences est de 0,5 à 2 cm. L'axe du piston est perpendiculaire à la surface de l'échantillon. L'amplitude des déplacements vaut typiquement  $500\mu\text{m}$ . Ces déplacements se propagent dans le gel de dimension  $10 \times 10 \times 7\text{ cm}^3$  sous la forme d'une onde de basse fréquence (10-300 Hz). Il s'agit d'une onde de cisaillement car sa vitesse de propagation (5 m/s) ne peut être le fait d'une onde de compression (1500 m/s). Cette affirmation n'est valable qu'en première approximation. La nature de ces ondes de basse fréquence fait l'objet de discussions approfondies aux paragraphes III-3 et III-4.



*Fig.1 Montage expérimental : un transducteur 3 MHz illumine l'échantillon pendant la propagation d'ondes de cisaillement. Les signaux rétrodiffusés sont enregistrés à une cadence de 1300 Hz. La génération des ondes de cisaillement est assurée par un piston circulaire dont le diamètre varie selon les expériences de 0,5 à 2 cm.*

Lors de leur propagation, ces ondes traversent la zone insonifiée par les ultrasons (zone hachurée sur la figure 1). La profondeur d'exploration de cette fenêtre est fixée par le logiciel

d'acquisition à 38 mm. Sa position réglable est, en général, choisie autour de la distance focale du transducteur. Les signaux rétrodiffusés sont enregistrés. Lors de la propagation de l'onde de cisaillement, les déplacements de matière modifient les signaux rétrodiffusés. Ces modifications rendent compte du mouvement induit par l'onde de cisaillement. Les déplacements sont calculés par une méthode d'intercorrélation avec une précision inférieure au micromètre (voir paragraphe *limite et précision* dans ce chapitre). A partir de ces déplacements, la vitesse de propagation (quelques mètres par seconde), ainsi que l'atténuation de l'onde de cisaillement sont mesurées. Enfin, pour un modèle rhéologique, les propriétés mécaniques du milieu peuvent être évaluées numériquement.

La méthode brièvement décrite dans ce paragraphe s'applique aux matériaux viscoélastiques diffusants comme le sont la plupart des milieux biologiques. Il importe donc de comprendre le mécanisme de diffusion des ultrasons ainsi que la nature des signaux rétrodiffusés.

## **2 DESCRIPTION SOMMAIRE DE LA DIFFUSION ET DU SPECKLE ULTRASONORE**

### **Origine du Speckle**

Un transducteur ultrasonore émet un signal bref. L'onde se propage et rencontre des inhomogénéités de structure que sont les diffuseurs. Dans le cas des milieux biologiques, ces diffuseurs sont aléatoires aussi bien en position, qu'en forme, taille ou impédance. Dans le cas des muscles, voici les diffuseurs rencontrés par une onde ultrasonore sondant le milieu.

fibre musculaire =  $\phi$  6 mm

ensemble de cellules =  $\phi$  100  $\mu$ m

cellule musculaire =  $\phi$  20  $\mu$ m

agrégat de graisse =  $\phi$  10  $\mu$ m

filament d'actine = 1.5  $\mu$ m

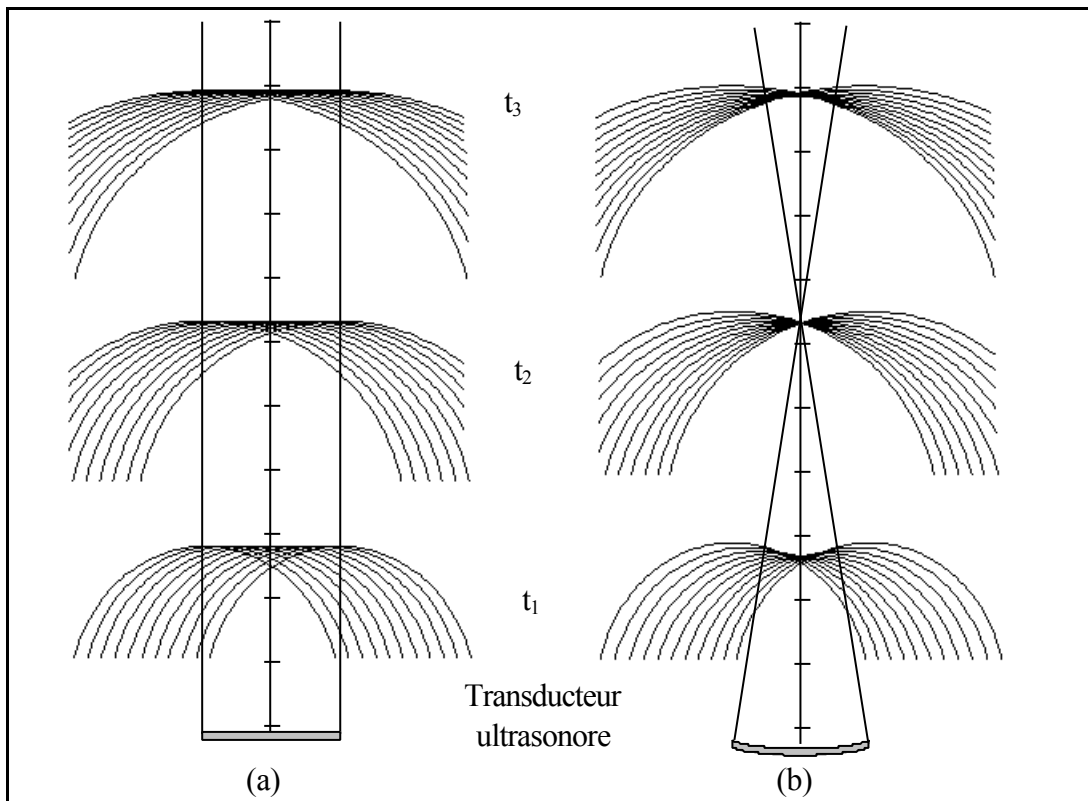
Dans les gels d'agar-gélatine, le rôle des diffuseurs est joué par les grains solides d'agar. Ces nombreux diffuseurs vont chacun réfléchir une petite partie du signal initial. Le transducteur reçoit alors un signal temporel appelé, en référence au phénomène analogue observé en optique cohérente, *bruit de speckle acoustique*. Ce speckle acoustique, aussi appelé "tavelure" en français, résulte donc de l'interférence des signaux rétrodiffusés par les nombreuses inhomogénéités contenues dans le milieu. Dans le cadre de l'approximation de diffusion simple (dite première approximation de

Born), les ondelettes réfléchies par les diffuseurs sont trop faibles pour être diffusées une deuxième fois, mais sont néanmoins susceptibles d'atteindre le capteur. Cette approximation est valable dans les milieux biologiques tels que les produits laitiers, les muscles et les tissus mous pour lesquels les variations de compressibilité sont faibles  $\frac{\Delta\chi}{\chi}=5\%$ ; ces milieux sont dits « à diffusion simple ».

L'analyse plus fine du speckle acoustique montre que la répartition spatiale des diffuseurs qui participent à un instant donné au signal ultrasonore correspond à un volume appelé « volume isochrone ».

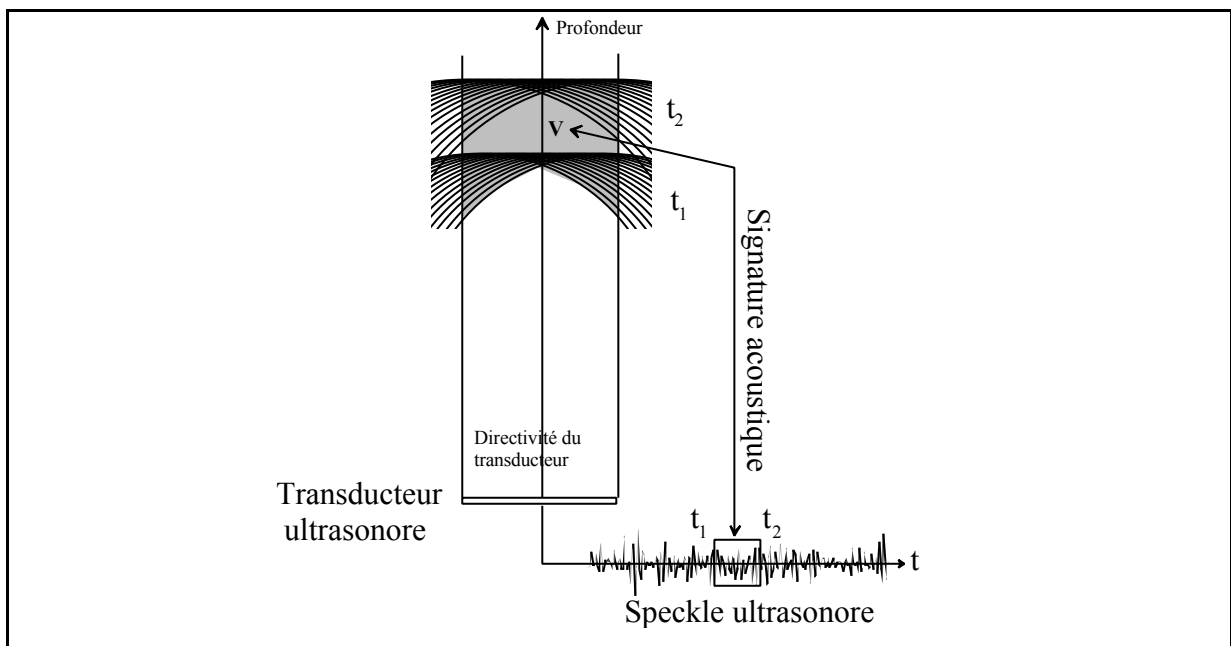
### Volume isochrone et signature acoustique

Utilisant des signaux brefs, l'échographie pulsée permet de relier le temps d'arrivée d'un écho à la position du réflecteur qui lui a donné naissance, et fait appel à la notion de *volume isochrone* [4], [5], introduite à partir du formalisme impulsionnel de Stepanishen [6]. A chaque instant, on peut considérer que le signal reçu provient d'une zone précise du milieu appelée volume isochrone, celui-ci étant défini comme l'ensemble des points qui à un instant donné sont susceptibles de contribuer à l'écho perçu par le récepteur (Fig.2).



*Fig.2 Volume isochrone à trois instants différents,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , pour un transducteur plan (a) et pour un transducteur concave (b).*

Par extension, on peut considérer que le signal contenu dans la fenêtre temporelle  $[t_1, t_2]$  provient d'un volume précis  $V$ , celui-ci étant défini comme l'ensemble des volumes isochrones entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . Autrement dit, une fenêtre temporelle prise dans le signal rétrodiffusé de  $1,5 \mu s$  (largeur typique) correspond à des diffuseurs contenus dans un volume de matière  $V$  d'épaisseur 1 mm centré à la profondeur  $p = \frac{c(t_1 + t_2)}{4}$  ( $c$  est la célérité des ultrasons). Sur la figure (3), les volumes isochrones sont représentés aux instants  $t_1$  et  $t_2$ . Le volume  $V$  est représenté en gris. Il est délimité par ces volumes isochrones et par la directivité du transducteur. Pour simplifier le schéma, la directivité est confondue avec l'ombre de transducteur.



*Fig.3 L'ensemble des volumes isochrones entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  et la directivité du transducteur définissent un volume  $V$ . Ce volume contient l'ensemble des diffuseurs qui participent au speckle ultrasonore contenu dans la fenêtre temporelle  $[t_1, t_2]$ .*

Il est très important de noter que le bruit d'interférence ainsi produit n'est pas une grandeur aléatoire de même nature que le bruit de grenaille dans les circuits électroniques. Le speckle est entièrement déterminé par la donnée de toutes les positions de tous les diffuseurs. Par conséquent, dans un milieu immobile, plusieurs réalisations de tirs ultrasonores donnent le même signal

rétrodiffusé, le même speckle acoustique. Par contre, au sein d'un milieu agité par des mouvements d'origine naturelle (respiration, flux sanguin) ou artificielle comme c'est le cas dans nos expériences (vibrations mécaniques imposées depuis la surface du milieu à explorer), le speckle acoustique se modifie. A partir de ces modifications, il est possible, par un traitement de signal basé sur l'intercorrélation de ces signaux, de calculer les déplacements de matière.

### 3 L'ALGORITHME FONDAMENTAL : L'INTERCORRELATION

L'acquisition d'un signal ultrasonore peut être considéré comme instantanée par rapport à l'échelle de temps des ondes de basse fréquence. Chacun de ces signaux est donc un instantané qui rend compte de la position des diffuseurs. Le mouvement des diffuseurs est reconstitué en comparant les signaux ultrasonores les uns aux autres avec une méthode d'intercorrélation. Ce traitement peut se décomposer en trois phases. La première, la phase élémentaire, consiste à calculer le déplacement d'un petit groupe de diffuseurs entre deux signaux ultrasonores consécutifs. Ce petit groupe de diffuseurs constitue un volume élémentaire comme celui de la figure (3). La seconde phase consiste à calculer le déplacement de *plusieurs* volumes élémentaires entre deux signaux ultrasonores consécutifs. Enfin la troisième est une itération des deux premières phases. Elle consiste à calculer le déplacement de *plusieurs* volumes élémentaires entre *plusieurs* signaux ultrasonores consécutifs. Le résultat final est une matrice qui contient les déplacements de volumes élémentaires au cours du temps. Visualisée sous forme d'un sismogramme, cette matrice rend compte des mouvements des diffuseurs à toutes les profondeurs lors de la propagation des ondes de basse fréquence.

#### Les trois phases du traitement de signal

- La première phase consiste à calculer le déplacement qu'a subi un volume élémentaire situé à une profondeur donnée, entre deux tirs ultrasonores (voir figure 4). Pour cela, on sélectionne sur le premier signal ultrasonore  $S_1$  la fenêtre temporelle  $X(t)$  entre les instants  $t_x$  et  $t_x + \Delta t$ .  $X(t)$  contient la signature acoustique de l'ensemble des diffuseurs contenus dans le volume de matière  $V_x$ . Les expériences montrent que cette fenêtre doit avoir une largeur d'environ trois longueurs d'onde ultrasonore au moins pour contenir une signature acoustique unique. Ensuite, sur le second signal ultrasonore ( $S_2$ ),  $N$  fenêtres  $Y(t)$  entre les instants  $t_y$  et  $t_y + \Delta t$  sont sélectionnées autour de la position temporelle  $t_x$ . Pour chaque couple de fenêtres ( $X, Y$ ), on calcule un coefficient de corrélation  $c(x, y)$  :



$$c(x, y) = \sum_{t=0}^{\Delta t} (X(t) - \bar{X})(Y(t) - \bar{Y}) \quad (1)$$

où  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont les moyennes temporelles de X et Y.

$$\begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t=0}^{\Delta t} X(t) \\ \bar{Y} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t=0}^{\Delta t} Y(t) \end{cases} \quad (2)$$

$c(x, y)$  est ensuite normalisé de façon à obtenir un degré de ressemblance adimensionné  $R(t_d)$ , fonction du glissement temporel  $t_d = |t_y - t_x|$  entre les fenêtres corrélées :

$$R(t_d) = \frac{c(x, y)}{\sqrt{c(x, x)c(y, y)}} \quad (3)$$

Ce coefficient tend vers 1 lorsque les deux fenêtres X et Y contiennent la même signature échographique. La position de son maximum permet donc de calculer le glissement temporel  $\delta t_x$  de la tranche de tissu étudiée entre le premier et le second tir. En effet, ce maximum repère la fenêtre parmi l'ensemble des fenêtres Y dont la signature acoustique ressemble le plus à celle de la fenêtre de référence X. Le glissement temporel de cette fenêtre Y par rapport à la fenêtre X peut être converti en déplacement spatial de la tranche de tissu via la formule classique en mode échographique :

$$\delta d_x = \frac{c \delta t_x}{2} \quad (4)$$

$\delta d_x$  est le déplacement spatial d'un groupe de diffuseurs,  $\delta t_x$  est le glissement temporel de sa signature acoustique entre deux tirs ultrasonores et c la célérité des ultrasons (1500 m/s).

En résumé, par intercorrélation, on peut calculer, entre deux tirs ultrasonores  $S_1$  et  $S_2$ , le glissement temporel  $\delta t_x$  d'une fenêtre X puis le déplacement  $\delta d_x$  de la tranche de matière qui lui est associée.

Afin d'améliorer la précision sur les mesures on utilise une astuce de calcul : l'interpolation du coefficient de corrélation. En effet, la précision sur les déplacements est limitée par l'aptitude du traitement à évaluer la position du maximum de  $R(t_d)$  (coefficient de ressemblance). Or, le coefficient de signaux échantillonnés à 40 MHz est lui même échantillonné à 40 MHz. Par conséquent la précision ne peut pas excéder un pas d'échantillonnage soit 25 ns ou environ 20  $\mu m$  ce qui

représente  $1/25$  de longueur d'onde ultrasonore. Un facteur 20 est gagné en interpolant le coefficient de corrélation.

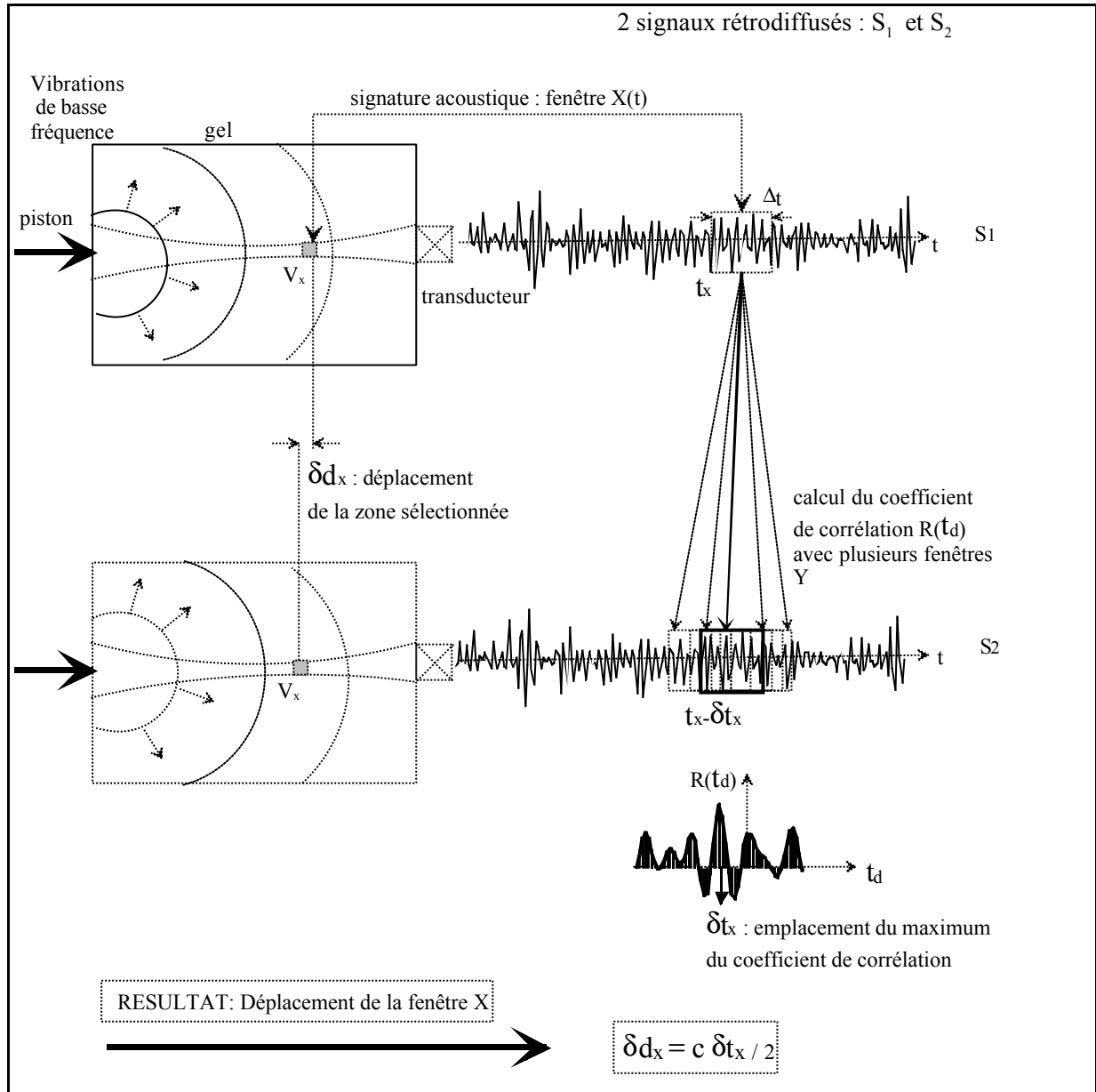


Fig.4 Calcul du glissement temporel d'une fenêtre sur deux signaux rétrodiffusés consécutifs. On en déduit ensuite le déplacement d'un volume  $V_x$  d'environ 1 mm d'épaisseur au sein du milieu entre deux tirs ultrasonores.

L'interpolation porte sur le coefficient de corrélation et aurait tout aussi bien pu porter sur les signaux rétrodiffusés. En fait on peut montrer mathématiquement qu'il revient au même d'interpoler la corrélation de signaux échographiques que de corréler l'interpolation de ces signaux.

Par soucis de gain de temps, une adaptation de la première solution sera utilisée. Ce procédé consiste à isoler les 3 points autour du maximum du degré de ressemblance. Par ces trois points passe une unique parabole dont la position du maximum définit le nouveau glissement temporel  $\delta t_x$ .

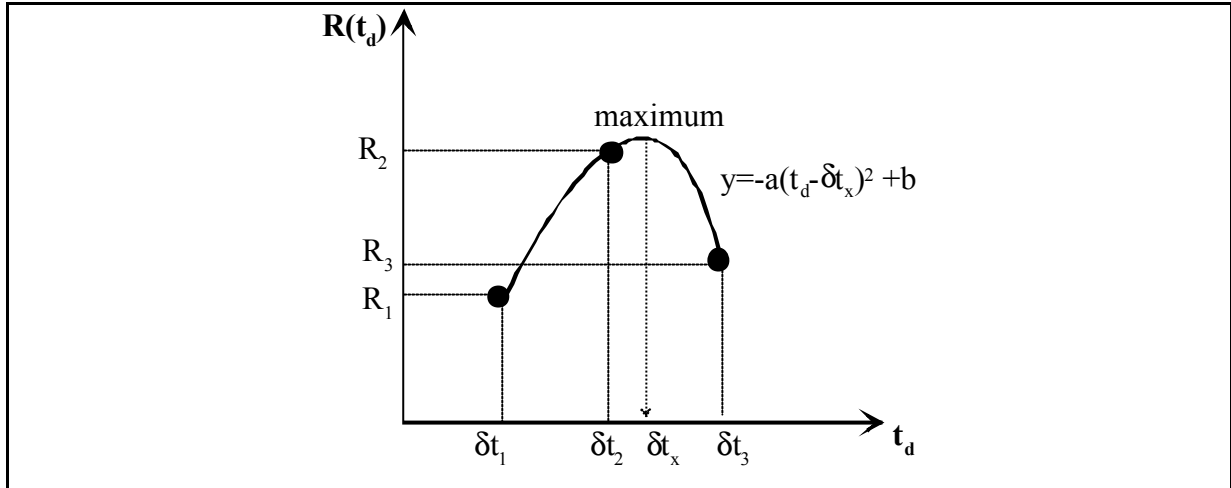


Fig.5 Interpolation parabolique du coefficient de corrélation  $R$ . Trois points  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  sont sélectionnés autour du maximum. L'emplacement du maximum de la parabole détermine avec une précision inférieure au pas d'échantillonnage des signaux échographiques (25 ns à 40 MHz) le glissement temporel d'une fenêtre entre deux tirs ultrasonores.

Le choix de l'interpolation parabolique sur trois points a été motivé par la simplicité de cette formule et de sa rapidité d'exécution pendant les calculs. L'interpolation est en effet sollicitée 6000 fois pendant le traitement des fichiers d'une expérience. Il existe des méthodes d'interpolation plus fines portant sur un plus grand nombre de points de coefficient de corrélation mais elles demandent des temps de calcul beaucoup plus longs.

- La seconde phase du traitement de signal est une itération de l'opération élémentaire décrite dans la phase 1. Le signal  $S_i$  est divisé en  $M$  fenêtres (1,2... $x-1$ , $x$ , $x+1$ ,... $M$ ) identiques de largeur  $\Delta t$ , Fig.6. Chacune de ces fenêtres fait l'objet des calculs de corrélation interpolée décrits dans la phase 1. Le taux de recouvrement des fenêtres est arbitraire. Les résultats sont stockés dans un tableau qui contient donc  $M$  déplacements ( $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_x, \delta_{x+1}, \dots, \delta_M$ ) correspondant à chacune des fenêtres de  $S_i$ . Comme ces fenêtres contiennent la signature acoustique de diffuseurs à différentes profondeurs, on peut tracer la courbe des déplacements de matière en fonction de la position de ces diffuseurs, Fig.6.

Cette deuxième phase aboutit donc aux déplacements entre deux signaux rétrodiffusés de volumes élémentaires (de profondeur typique de 1 mm) répartis sur 4 cm le long du faisceau ultrasonore.

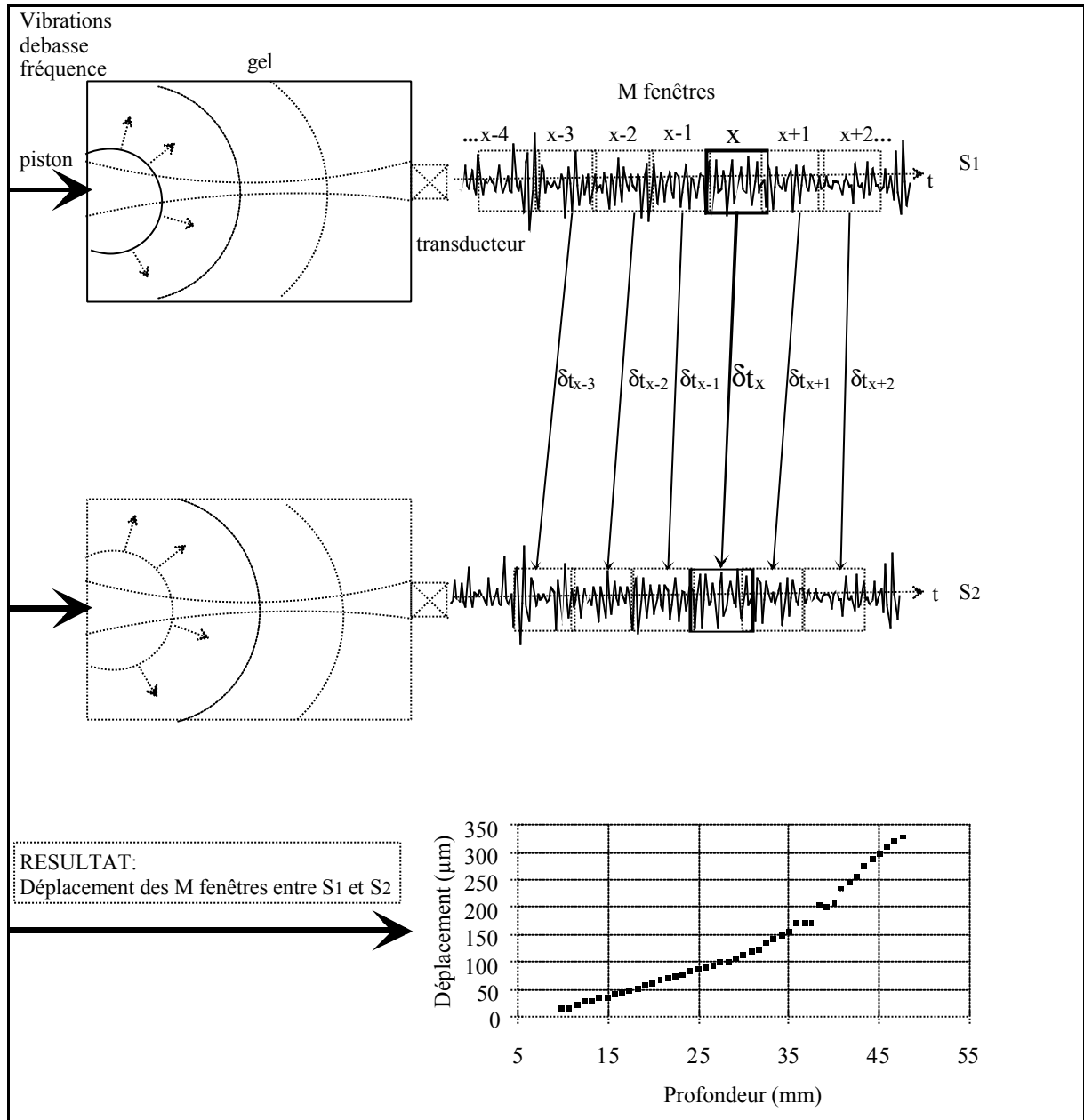


Fig.6 Calcul du glissement temporel de X fenêtres sur deux signaux rétrodiffusés. On en déduit les déplacements d'environ 50 volumes élémentaires répartis sur 40 mm de profondeur entre deux tirs ultrasonores.

- La troisième et dernière phase du traitement de signal est une itération des opérations décrites en phase 2. Après avoir stocké les déplacements des M volumes élémentaires calculés entre le premier signal rétrodiffusé et le second, un troisième signal ultrasonore est traité. Chacune des M fenêtres du signal S<sub>2</sub> est corrélée avec le signal S<sub>3</sub> Fig.7. Les déplacements ainsi calculés entre le signal S<sub>2</sub> et S<sub>3</sub>

constituent un nouveau tableau de déplacements. C'est au tour de  $S_3$  d'être corrélé à un quatrième signal rétrodiffusé, un troisième tableau de déplacements est enregistré et ainsi de suite. Pour une acquisition de  $N$  signaux rétrodiffusés, une matrice des déplacements  $(N-1, M)$  est construite : une ligne contient les déplacements entre deux instants de  $M$  volumes de matière élémentaire, tandis qu'une colonne contient les déplacements de volumes élémentaires entre  $N$  tirs ultrasonores consécutifs. Les tirs ultrasonores sont déclenchés à intervalles réguliers choisis entre 100 et 1300 Hz. Les déplacements de la matrice s'assimilent donc à une mesure de vitesse particulière en fonction de la profondeur et du temps. Le temps total nécessaire à une acquisition des signaux ultrasonores est d'environ une dizaine de millisecondes. Le traitement de signal nécessite quant à lui quelques secondes sur un ordinateur moyen (486 à 66 MHz).

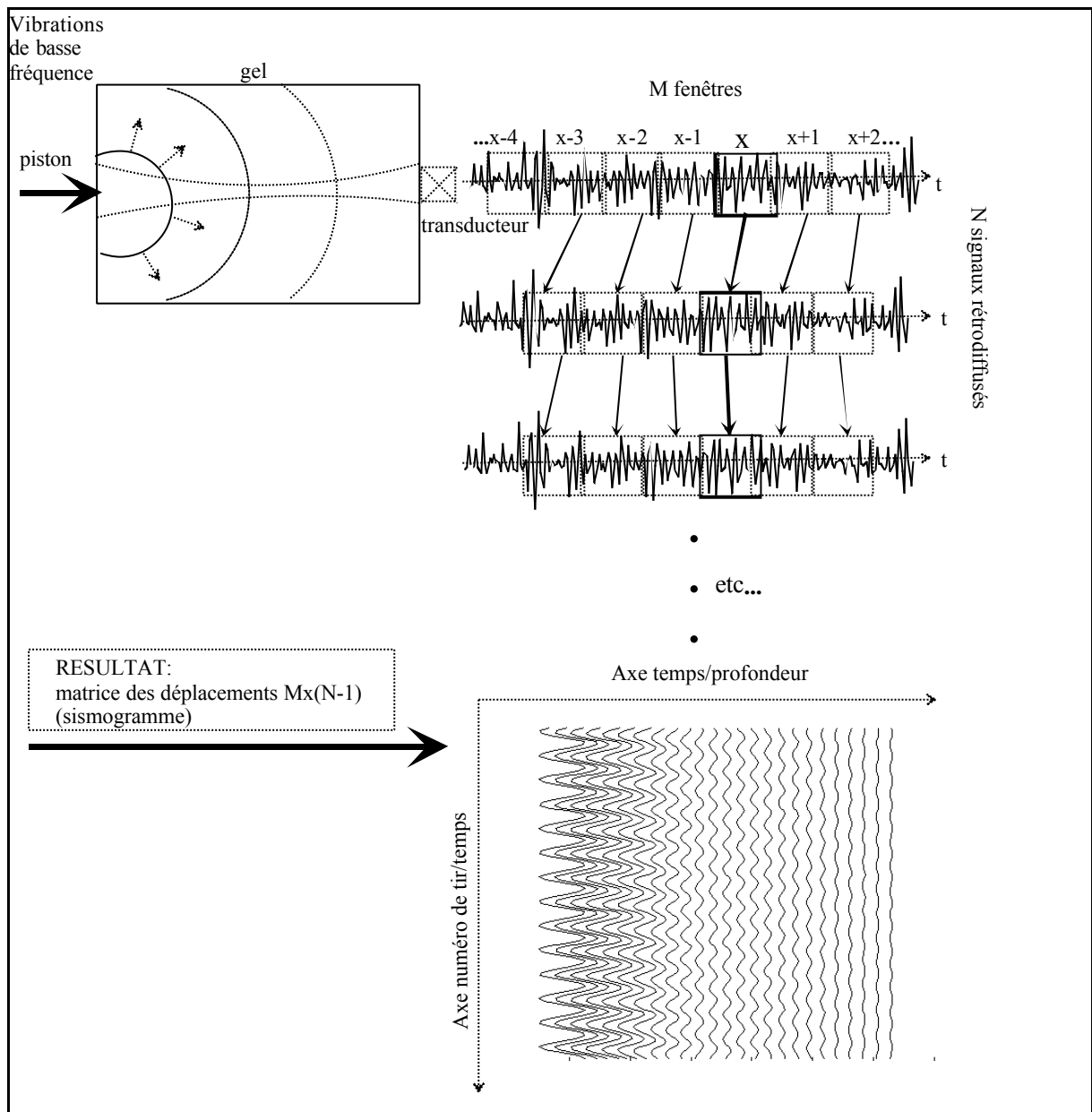


Fig.7 Généralisation de l'intercorrélacion sur  $N$  signaux rétrodiffusés. Visualisation sismique

*de la matrice  $(N-1, M)$ . Il s'agit de la vitesse particulière de volumes élémentaires en fonction de la profondeur et du temps.*

La technique d'interférométrie speckle ultrasonore aboutit donc à une matrice qui contient la vitesse particulière<sup>1</sup> de volumes élémentaires de matière en fonction du temps et de la profondeur. L'ensemble de ces mesures se visualise sur la figure 7 sous forme d'un sismogramme. On peut y voir l'atténuation de l'onde de basse fréquence, les amplitudes sont plus importantes pour les couches du côté du piston sur la gauche. On distingue également le déphasage dû à la propagation de l'onde dans le gel; les sinusoïdes sont d'autant plus déphasées qu'elles se situent loin du piston sur la droite. La vitesse de ces ondes basses fréquences peut être mesurée à partir d'un tel sismogramme. Elle est de 3,42 m/s. La valeur très basse de la vitesse constitue un argument fort pour déterminer la nature de l'onde de basse fréquence. Il ne peut s'agir que d'une onde de cisaillement car la vitesse des ondes de compression est de 1500 m/s dans les milieux biologiques.

### **Comparaison à l'interférométrie en optique**

Le titre de ce manuscrit « interférométrie speckle ultrasonore » fait bien entendu référence à l'interférométrie en optique car il existe une analogie très forte entre les techniques de mesure de déplacement. Comme en optique, l'interférométrie speckle ultrasonore donne une mesure précise de déplacements à partir du calcul des déphasages entre un tir ultrasonore (équivalent du faisceau référence) et le tir ultrasonore suivant (faisceau sonde). Dans les deux domaines de la physique, cette mesure de déphasage donne une précision sur les déplacements bien inférieure à la longueur d'onde. Dans les milieux biologiques, la longueur d'onde ultrasonore est typiquement de 500  $\mu\text{m}$  et les déplacements mesurés peuvent atteindre 1  $\mu\text{m}$  (voir le paragraphe suivant). Enfin, en optique comme en acoustique, seul la composante de déplacement parallèle au faisceau peut être obtenue. La différence fondamentale réside dans la nature de la zone sur laquelle on mesure les déplacements. En optique, le faisceau sonde frappe une surface réfléchissante et est ensuite comparé au faisceau référence. Le calcul de déphasage permet de calculer les déplacements de points situés sur la surface. Les ultrasons quant à eux pénètrent dans le volume avant d'être réfléchis par des diffuseurs.

---

<sup>1</sup> On confond quelques fois « vitesse particulière » et « déplacement » lorsque qu'il s'agit de sismogramme expérimentaux. Les déplacements dont il est question sont les déplacements (en  $\mu\text{m}$ ) entre deux tirs ultrasonores (interval de temps). La notion d'interval de temps est donc sous entendue. Il ne s'agit pas de déplacement absolue dans un repère fixe. Dans nos expérience, « vitesse particulière » et « déplacement » sont donc proportionnels au facteur de fréquence de récurrence des tirs ultrasonores près.

Le calcul de déphasage permet donc de calculer les déplacements de points situés en volume, au sein de la matière.

#### 4 ORIGINE DU BRUIT ET LIMITE DE LA METHODE

##### Formule de Cramér-Rao Lower Bound (CRLB)

L'erreur sur l'estimation d'un paramètre  $P$  d'un signal soumis à un bruit blanc a été calculée par H. L. Van Trees [7]. Elle est connue sous le nom de CRLB (Cramér-Rao Lower Bound) et donne pour l'écart type :

$$\sigma (P - \Delta \hat{p}) \geq \sqrt{\frac{N_0}{\int_0^T \left[ \frac{\partial s(t,P)}{\partial P} \right]^2 dt}} \quad (5)$$

où  $N_0$  est le puissance spectrale  $(\int_{-\infty}^{+\infty} |n(\omega)|^2 d\omega)$  d'un bruit blanc  $n(\omega)$ ,  $P$  est la vraie valeur du paramètre,  $\Delta \hat{p}$  son estimation,  $T$  est le temps d'observation et  $s(t,P)$  est le signal utile. Si  $r(t)$  est le signal reçu et  $n(t)$  un bruit blanc, on a :

$$r(t) = s(t,P) + n(t).$$

Cette expression a été adaptée à la mesure du décalage temporel entre deux signaux  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  par Walker et Trahey [8] :

$$\sigma (\Delta t - \Delta \hat{t}) \geq \sqrt{\frac{1}{T \int_{-\infty}^{+\infty} (2 \Pi f)^2 \left[ \frac{R_{12}^2(f)}{1 - R_{12}^2(f)} \right] df}} \quad (6)$$

$\Delta t$  est le décalage temporel réel et  $\Delta \hat{t}$  le décalage estimé,  $T$  est la largeur d'une fenêtre et  $R_{12}(f)$  est la transformée de Fourier de la corrélation normalisée des signaux rétrodiffusés. Dans le cas de signaux totalement décorrelés du bruit, on obtient la formulation analytique suivante :

$$\sigma (\Delta t - \Delta \hat{t}) \geq \sqrt{\frac{3}{2 f_0^3 \Pi^2 T (B^3 + 12B)} \left[ \frac{1}{\rho^2} \left( 1 + \frac{1}{SNR^2} \right)^2 - 1 \right]} \quad (7)$$

Cette formule fait apparaître plusieurs facteurs qui déterminent la précision sur la mesure des déplacements. Tout d'abord la fréquence centrale ultrasonore  $f_0$ ; une fréquence élevée diminue l'écart type. Ensuite la largeur temporelle  $T$  des signaux corrélés doit être grande tout comme doit l'être  $B$ , la largeur de bande. Elle dépend du transducteur ultrasonore utilisé. Enfin la mesure des

déplacements est d'autant plus précise que le coefficient de corrélation normalisé  $\rho$  entre les signaux est proche de l'unité et que le rapport signal sur bruit  $SNR$  est grand.

La formule (7) prend donc en compte les effets de bruits électroniques ( $SNR$ ), la décorrélation du speckle ( $\rho$ ), la largeur des fenêtres de corrélation ( $T$ ), la fréquence centrale ( $f_0$ ) et la bande passante ultrasonore ( $B$ ).

### L'optimisation des paramètres

Il n'est pas facile de minimiser l'écart type de l'équation 7, car les paramètres ne sont pas indépendants les uns des autres. Supposons par exemple que l'on augmente la fréquence ultrasonore  $f_0$  significativement afin de diminuer l'écart type. Dans ce cas une diminution du rapport signal sur bruit ( $SNR$ ) est observée car l'atténuation augmente avec la fréquence dans les milieux biologiques ce qui augmente l'écart type. Les évolutions des deux paramètres ont un impact opposé sur l'écart type.

Dans cet autre exemple, un autre type de compromis doit être trouvé entre l'écart type donné par 7 et la résolution de la méthode. En effet il est montré au paragraphe II-2 qu'à une fenêtre temporelle sur le signal rétrodiffusé correspond un volume élémentaire dans le matériau. Une fenêtre temporelle étroite caractérise un petit volume. Par conséquent choisir des petites fenêtres temporelles permet de suivre les déplacements de petits volumes de matière. C'est ce que l'on définit comme la résolution de la méthode. Mais diminuer la largeur temporelle  $T$  des fenêtres d'exploration revient à augmenter l'écart type des mesures de déplacement, Eq.(7). Cette fois le compromis doit s'établir entre résolution et précision sur les mesures.

L'optimisation des paramètres s'est effectuée en s'appuyant sur les études effectuées par Chen [14], Cespedes [12], [9] mais également à partir de notre expérience acquise au cours de cette thèse. En résumé, l'équation (7) est implicite et à ce titre n'est pas minimisable facilement.

En comparant les résultats d'une simulation numérique aux prédictions de l'équation 7, Walker et Trahey [8] ont justifié le bien fondé de leurs calculs. Avec une fréquence ultrasonore de  $f_0=5$  MHz, une largeur de bande normalisée  $B=50\%$ , une largeur de fenêtre  $T=1,3 \mu s$  (1 mm ou 3,25 longueur d'onde), un coefficient de corrélation  $\rho=0,9929$  et un rapport signal sur bruit  $SNR=60$  dB, l'écart type minimum sur une mesure de décalage temporel est  $\sigma(\Delta t - \Delta \hat{t}) = 1,48 ns$ , ils ont trouvé un écart type sur les déplacements de 1,1  $\mu m$ .



Dans les expériences présentées dans ce mémoire, notre choix s'est porté vers une fenêtre de largeur  $T=1,6 \mu s$  (1,2 mm ou 4 longueurs d'onde) pour un recouvrement de 15%. Les signaux sont échantillonnés à 8 points par période ultrasonore. La largeur de bande des transducteurs ultrasonores que nous utilisons est de 55% et le rapport signal sur bruit est typiquement de 80 dB. L'écart type prédit par (7) est alors de :  $\sigma (\Delta t - \Delta \hat{t}) = 0,60 ns$  ce qui représente une précision sur les déplacements de  $0,45 \mu m$ . La précision sur les déplacements, meilleur que celle de Walker et Trahey, est logique car nous travaillons sur des fenêtres temporelles plus larges avec un meilleur rapport signal sur bruit.

### Origines de la décorrélation

D'après l'équation 7, la décorrélation des signaux ultrasonores dégrade la précision sur les déplacements. Or les déformations provoquées par une contrainte extérieure ou par la propagation d'une onde de basse fréquence engendrent inévitablement une décorrélation des signaux rétrodiffusés. Elle a été étudiée par Meunier et Bertrand, [10]. Ils ont pu établir l'équation (8) qui donne le coefficient de corrélation  $\rho$  en fonction de la déformation  $s$  :

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{((1-s)^2 + 1)[(\frac{1}{1-s})^2 + 1]}} e^{-\frac{1}{2} l \frac{(2\pi f_0)^2}{B^4} l \frac{s^2}{(1-s)^2 + 1}} \quad (8)$$

Dans l'expression du coefficient de corrélation  $\rho$ ,  $s$  est la déformation,  $f_0$  est la fréquence ultrasonore du transducteur et  $B$  est sa bande passante (en MHz). Cette équation vérifie que dans les cas extrêmes où la déformation est maximum ( $=1$ ) ou minimum ( $=0$ ), le coefficient de corrélation vaut respectivement 0 et 1. Le coefficient de corrélation est maximum lorsque le milieu n'est pas soumis à des déformations, diminue lorsque les déformations augmentent et atteint sa valeur minimum pour une déformation de 100%.

Ophir et Varghese [11], [12] ont proposé des méthodes permettant de réduire cette décorrélation. Elles consistent à modifier le signal ultrasonore en effectuant une compression logarithmique de l'amplitude ou bien en ne conservant que son signe ou encore en l'étirant temporellement (le « stretching »). Le but recherché par les auteurs est de corriger les altérations du signal rétrodiffusé provoquées par la déformation des tissus. Cette dernière méthode demande une connaissance *a priori* des taux d'étirement pour chaque fenêtre entre deux tirs ultrasonores.

Le mariage des équations (7) et (8) conduit à la notion de *filtre de déformation*.

### Filtre de déformation

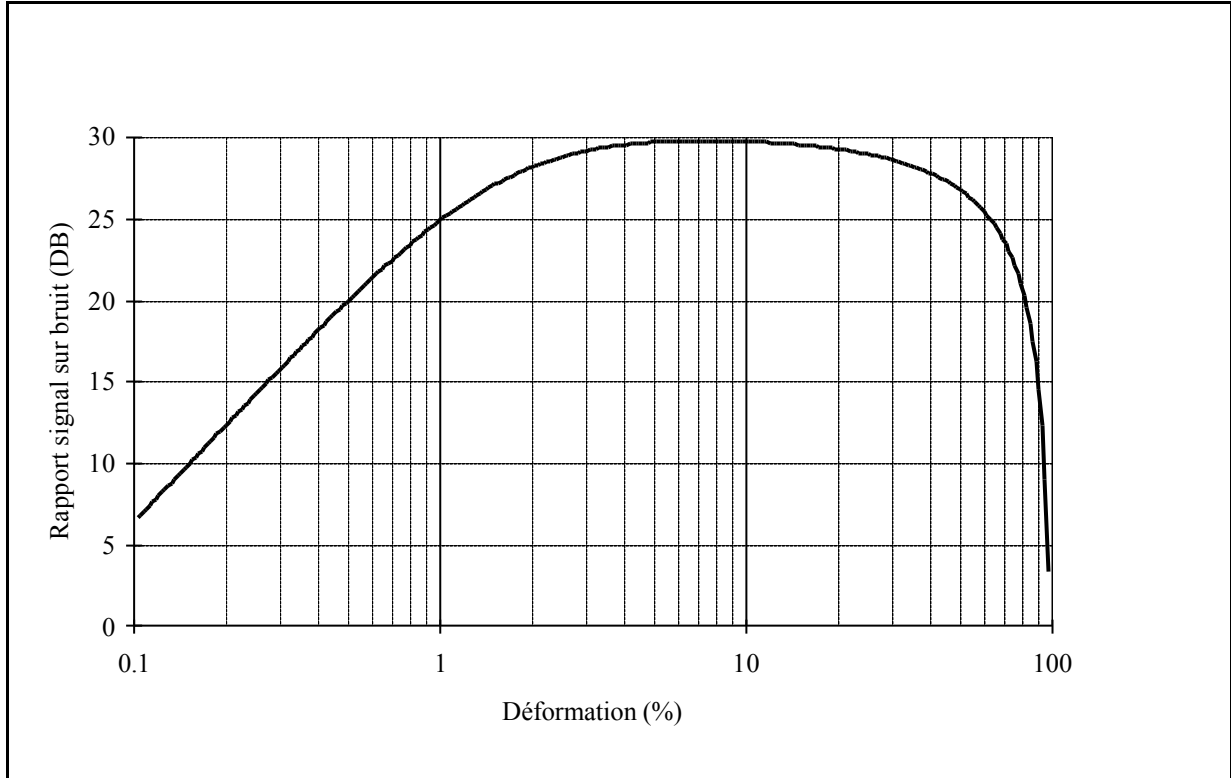


Fig.8 Le filtre de déformation est obtenu à partir des équations (7) et (8). Les déformations trop faibles ou trop fortes entraînent une diminution du rapport signal sur bruit. Ce rapport est optimum pour des déformations de 6%.

La notion de filtre de déformation (*Strain Filter*) discutée par Varghese en élastographie [13] repose sur les considérations simples suivantes : la technique d'intercorrélation interpolée ne permet pas de mesurer des déformations inférieures à la limite fixée par l'équation 7. Elle est donc un filtre passe-haut en déformation. Elle ne permet pas non plus de mesurer des déformations trop importantes; celles-ci engendrent une décorrélation des signaux rétrodiffusés, Eq.(8), qui dégrade la précision des mesures. La technique d'intercorrélation agit donc dans ce cas comme un filtre passe bas en déformation. Le filtre de déformation est caractérisé par l'équation (9). Cette équation définit le rapport signal sur bruit (SNR) comme le logarithme de la déformation  $s$  sur la déformation minimum mesurable  $s_{min}$ . Cette dernière est fixée par l'équation (7) dans laquelle on a remplacé le coefficient de corrélation  $\rho$  par son expression (8). Dans l'équation du filtre (9) illustré Fig.8, les valeurs des paramètres ont été choisies comme suit :  $f_0=3,56.10^6$  Hz,  $T=2,3.10^{-6}$  s,  $B=0,5$  (largeur

de bande de 50%),  $c=1540$  m/s,  $SNR=80$  et les déformations  $s$  sont calculées sur des volumes de 0,5 mm d'épaisseur ( $\Delta T=0,66\mu s$ ).

$$SNR(s) = 20 \log\left(\frac{s}{s_{min}}\right) = 20 \log\left(\frac{s \cdot \Delta T}{\sigma (\Delta t - \Delta \hat{t})}\right) \quad (9)$$

La notion de filtre de déformation peut être adaptée au cas particulier des ondes de basse fréquence mais nos études n'ont pas été approfondies dans ce sens. De façon générale on retiendra du filtre de déformation l'idée suivante : les déformations dues aux propagations d'ondes de basse fréquence engendrent une décorrélation des signaux ultrasonores qui diminue la précision sur les mesures de déplacements. Ces déformations sont amplifiées par l'augmentation de l'amplitude et de la fréquence de l'onde de basse fréquence. D'après nos observations expérimentales, en travaillant avec des vibrations de 1 mm d'amplitude et de fréquence inférieure à 400 Hz, il semble que ces deux critères ne soit pas limitatifs.

**Tableau récapitulatif**

Paramètre	Description	Effet sur la précision des déplacements
$f_0$	Fréquence centrale ultrasonore	La précision augmente avec la fréquence
T	Largeur d'une fenêtre de corrélation	Une grande largeur de la fenêtre diminue l'erreur mais aussi la résolution du système
B	Largeur de bande ultrasonore	Une largeur de bande étroite détériore les mesures
SNR	Rapport signal sur bruit	Un mauvais échantillonnage ( $<5$ fois la période ultrasonore) diminue la précision
$\rho$	Coefficient de corrélation normalisé	Ce coefficient doit être maximum. Il diminue fortement pour des déformations d'amplitude $>3\%$ , ou de direction perpendiculaire au faisceau ultrasonore. La nature homogène des diffuseurs (foie) semble détériorer aussi la précision.

D'autres facteurs influencent la précision des déplacements par les méthodes de corrélation. Voici pêle mêle ce que l'on trouve dans la littérature :

Il semble que l'échantillonnage des signaux rétrodiffusés influence la qualité du rapport signal sur bruit (14). Un échantillonnage de moins de 5 points par période ultrasonore rend limitatif le rapport signal sur bruit car, lors du calcul de la corrélation, l'effet de moyenne du bruit est d'autant plus prononcé que les signaux sont suréchantillonnés.

L'uniformité des types de diffuseurs rencontrés dans un milieu est un facteur qui détériore la qualité de la corrélation; il a en effet été remarqué [14] que les déplacements de matière sont mesurés plus précisément dans un muscle que dans un foie où les diffuseurs sont des groupes de cellules de taille identique.

La décorrélation des signaux rétrodiffusés (diminution de  $\rho$ ) est observée lorsque la direction des déplacements de matière est perpendiculaire au faisceau ultrasonore ou lorsque l'amplitude de ces déplacements est importante entre deux tirs ultrasonores. O'Donnell [15] a montré par des simulations que pour des déformations des tissus de plus de 4%, les effets de décorrélation augmentent rapidement.

### Remarques

Les déplacements auxquels on accède par interférométrie speckle ultrasonore sont colinéaires au faisceau ultrasonore. Cette technique repose en effet sur la qualité de la résolution axiale du transducteur ultrasonore. Les déplacements perpendiculaires au faisceau ultrasonore peuvent pourtant être calculés par des algorithmes de reconstruction basés sur la propriété d'incompressibilité des tissus biologiques [16].

Il faut également mentionner, dans le domaine du traitement de signal, l'approche très intéressante de Kallel, [17]. Elle repose sur un double calcul de corrélation. Cette technique élimine les artefacts, améliore légèrement la précision sur les déplacements, mais allonge le temps de traitement des signaux.

Enfin, il peut paraître surprenant d'effectuer des mesures de déplacements avec une précision bien inférieure à la longueur d'onde ultrasonore (et donc inférieure à la résolution). L'explication est la suivante : en général, la résolution d'un système d'imagerie est limitée à une demi longueur d'onde car deux réflecteurs séparés par une distance inférieure génèrent des échos inséparables; ils se confondent sur l'image. Maintenant, si l'on suppose que ces deux réflecteurs sont déplacés ensemble

et qu'une nouvelle image est enregistrée. La comparaison des deux images donne l'information sur ce déplacement. La finesse de la mesure de déplacement dépend de la capacité à comparer deux images. La limite de précision sur les déplacements et la résolution du système d'imagerie ne relèvent pas tout à fait du même problème.

### **Conclusion du chapitre**

De manière générale l'interférométrie speckle ultrasonore permet de mesurer des déplacements dans des milieux diffusants viscoélastiques. Ces déplacements sont filtrés en fonction de leur amplitude, de leur fréquence et de nombreux autres paramètres de traitement de signal. La liste de tous ces paramètres n'est pas exhaustive. Ce chapitre permet toutefois de mieux comprendre l'impact des plus influents d'entre eux. L'approche rigoureuse du filtre de déplacement peut s'avérer utile pour résoudre le problème délicat de l'optimisation des paramètres en interférométrie speckle ultrasonore.

Quoiqu'il en soit, les méthodes dynamiques souffrent moins d'un manque de précision sur les mesures de déplacement que de l'incompréhension des phénomènes physiques qu'elles engendrent. Par exemple, l'étude du premier sismogramme a permis de calculer la vitesse de l'onde de basse fréquence et donc d'en déterminer la nature : il s'agit d'une onde de cisaillement. Cette affirmation soulève alors plusieurs questions :

Comment une onde transverse peut-elle être générée par les vibrations d'un piston?

Un transducteur ultrasonore est un piston vibrant à des fréquences élevées. Pourtant, dans les tissus biologiques, il génère principalement des ondes longitudinales, d'où vient ce paradoxe?

Enfin, l'interférométrie speckle ultrasonore mesure exclusivement la composante des déplacements selon l'axe ultrasonore. Comment les ondes de cisaillement peuvent-elles être détectées lorsque le faisceau ultrasonore coïncide avec la direction de propagation?

Toutes ces questions sont au coeur des discussions du chapitre III.

## REFERENCES

- 
- 1 K.J.Parker, R.M.Lerner, Sonoelasticity of Organs : Shear Waves Ring a Bell, *J.Ultrasound Med.*, **11**:387-392 (1992).
  - 2 J. Ophir, I. Céspedes, H. Ponnekanti, Y. Yasdi and X. Li, « Elastography: A Quantitative Method for Imaging the Elasticity of Biological Tissues », *Ultrasonic Imaging*, **13**, pp.111-134 (1991).
  - 3 C. L. de Korte, E. I. Céspedes, A. F. W. Van Der Steen, B. Norder, « Tissue mimicking material and image artefact for intravascular elastography », *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 1181-1184 (1996).
  - 4 M. A. Fink, J. F. Cardoso, « Diffraction Effects in Pulse Echo Measurement », *IEEE Trans. on Son. Ultr.*, Vol. SU-31, n°4 (july 1984).
  - 5 J. F. Cardoso, M. Fink, « Echographic Diffraction Filters and the Diffraction Function for Random Media Through an instantaneous Time Frequency Approach », *J. Acoust. Soc. Am.*, **90**, (august 1991).
  - 6 P. R. Stepanischen, « Transient Radiation from Pistons in an Infinite Planar Baffle », *J. Acoust. Soc. Am.*, **49**, pp.1629-1638 (1971).
  - 7 H. L. Van Trees, « Detection, Estimation and Modulation Theory », part I. New York: Wiley (1968).
  - 8 W. F. Walker and G. E. Trahey, « A Fundamental Limit on the Accuracy of Speckle Signal Alignment », *IEEE, Trans. Ultr. Fer. Freq. Con.*, **41**, n°5 (Sept 1994).
  - 9 I. Céspedes, J. Ophir, S. Kaisar Alam, « The Combined Effect of Signal Decorrelation and Random Noise on the Variance of Time Delay Estimation », *IEEE, UFFC*, **44**, N°1 (1997).
  - 10 J. Meunier and M. Bertrand, « Ultrasonic Speckle Motion inherent to Tissue Motion: Theory and Simulation », *Proc. Ultrasonic Symp.*, *IEEE*, pp.865-868 (1989).
  - 11 T. Varghese and J. Ophir, « Performance Optimization in Elastography: Multicompression with Temporal Stretching », *Ultrasonic Imaging*, **18**, 193-214 (1996).
  - 12 I. Céspedes and J. Ophir, « Reduction of Image Noise in Elastography », *Ultrasonic Imaging* **15**, 89-102 (1993).
  - 13 T. Varghese, J. Ophir, « A theoretical Framework for Performance Characterization of Elastography: The Strain Filter », *IEEE Trans. on UFFC*, **44**, n°1 (1997).

- 
- 14 E. J. Chen, W. K. Jenkins and W. D. O'Brien, « The Impact of Various Imaging Parameters on Ultrasonic Displacement and Velocity Estimates », IEEE Trans. on Ultr. Fer. Freq Control, **41**, No.3 (May 1994).
- 15 M. O'Donnell, A. R. Skovoroda, B. M. Shapo and S. Y. Emilianov, « Internal Displacement and Strain Imaging Using Ultraonic Speckle Tracking », IEEE Trans. on Ultr. Fer. and Freq. Control, **41**, No. 3 (May 1994).
- 16 M. A. Lubinski, S. Y. Emilianov, K. R. Raghavan, A. E. Yagle, A. R. Skovoroda and M. O'Donnell, « Lateral displacement Estimation Using Tissue Incompressibility », IEEE, UFFC, **43**, N°2 (1996).
- 17 F. Kallel and M. Bertrand, « A note on Strain Estimation Using Correlation Techniques », Ultrasonic symposium (IEEE), pp.883-887 (1993).

### III-ETUDE DES DEPLACEMENTS SUR L'AXE DU VIBREUR

*Toutes les études présentées dans ce chapitre portent sur une même zone au sein des échantillons : l'axe du piston. Dans ce cas simple unidimensionnel, nous nous emploierons à extraire de la propagation de l'onde de cisaillement les informations sur la rhéologie de gels d'agar-gélatine. Il convient donc de maîtriser les mesures expérimentales de vitesse de phase et d'atténuation de l'onde de cisaillement. Un certain nombre de biais affectent ces mesures. Ces biais, communs à toutes les techniques dynamiques décrites au paragraphe sonoélasticité du chapitre I, sont étudiés et analysés. Ils sont d'origine ondulatoire (diffraction, résonance). Cette démarche conduit à l'élaboration d'une nouvelle méthode : l'élastographie impulsionnelle. Le cheminement qui mène de la sonoélasticité à l'élastographie impulsionnelle recouvre les paragraphes III-1 à III-4. Ceux-ci contiennent des éléments de réponse aux questions posées à la fin du chapitre précédent :*

*Comment s'effectue la génération des ondes de cisaillement par un piston?*

*Pourquoi la fréquence de vibration du piston détermine-t-elle la nature de l'onde qui se propage dans les milieux biologiques (ondes de compression aux fréquences élevées et ondes de cisaillement aux fréquences basses)?*

*Comment expliquer l'existence d'une composante longitudinale à une onde de cisaillement?*

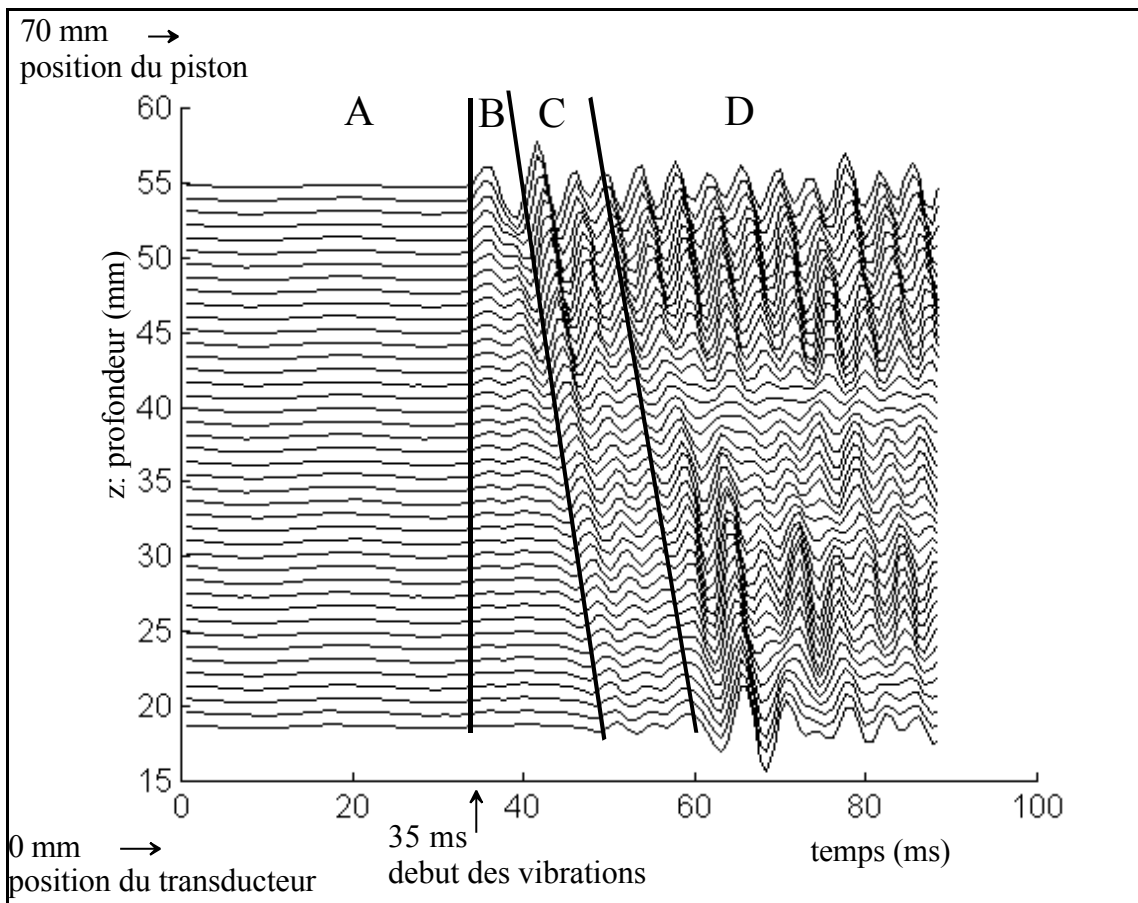
*Ce chapitre présente pour finir les résultats de l'élastographie impulsionnelle dans un gel d'agar-gélatine, dans un muscle de boeuf et dans un produit laitier. Dans le cadre du modèle rhéologique de Kelvin-Voigt, l'élasticité et la viscosité sont calculées numériquement.*

#### 1- MOUVEMENTS DE TISSUS INDUITS PAR UN TRAIN D'ONDE SINUSOÏDALE

L'analyse des mouvements de tissus induits par un train d'onde sinusoïdale sur l'axe d'un piston montre la capacité de l'interférométrie speckle ultrasonore à mesurer le champ de déplacement en fonction du temps au sein de la matière, Fig. 1.



Les déplacements sont affichés sous forme de sismogramme. L'amplitude maximum mesurée ici est de  $13\mu\text{m}$ . Le train d'onde est généré au temps  $T=35\text{ms}$  depuis la surface située à  $70\text{ mm}$  de profondeur. La profondeur nulle correspond à la position du transducteur ultrasonore. L'expérience est réalisée dans un gel à 3% d'agar et 6% de gélatine de dimensions  $10\times 10\times 7\text{ cm}^3$ . Le montage de cette expérience est présenté sur la figure 1 du chapitre II. Le rayon du piston est de  $0,5\text{ cm}$  et la fréquence centrale des vibrations du piston est  $250\text{ Hz}$ . La zone de visualisation par les ultrasons s'étend de  $18$  à  $56\text{ mm}$ . Les signaux rétrodiffusés sont découpés en 42 fenêtres de 4 longueurs d'onde (environ  $1.2\text{ mm}$ ) avec un recouvrement de 15%.



*Fig.1 Visualisation sismique des déplacements dans un gel mis en mouvement depuis la surface par des vibrations sinusoïdales à  $250\text{ Hz}$  au temps  $t=35\text{ms}$ . Chaque courbe horizontale représente les déplacements au cours du temps d'un volume situé à une profondeur comprise entre  $18$  et  $55\text{ mm}$ .*

On peut distinguer 4 zones sur le sismogramme de la figure 1. La première (zone A) contient des déplacements très faibles issus d'un milieu immobile ( $T<35\text{ms}$ ). La seconde zone (B) s'étend de  $35$  à environ  $50\text{ ms}$  (variable selon les profondeurs). Ces déplacements sont dûs à la propagation

d'une onde de compression. Dans la troisième de ces zones (C), approximativement comprise entre 50 et 60 ms (variable selon les profondeurs), on trouve les déplacements dominés par une onde de cisaillement. Les affirmations sur la nature des déplacements des zones (B) et (C) sont justifiées au paragraphe III-4. Les modes de vibration transitoire que contiennent les zones B et C conduisent à une troisième zone (D), au-delà de 60 ms, dans laquelle des modes de vibration stationnaire s'établissent. Dans cette zone, les déplacements sont la résultante à la fois des ondes générées par la source et de celles qui sont réfléchies par les frontières de l'échantillon.

Les ondes de compression seront notés  $P$  (premier) et les ondes de cisaillement  $S$  (second). Les ondes de compression se propagent en effet plus vite que les ondes de cisaillement.

Toutes les méthodes dynamiques décrites au paragraphe *sonoélasticité* du chapitre I utilisent des vibrations monochromatiques. Les mesures de vitesse d'atténuation ou d'amplitude de ces vibrations s'effectuent donc sur des déplacements qui correspondent à la zone (D) du sismogramme 1, là où les modes de vibration sont stationnaires. La comparaison des mesures de vitesse et d'atténuation dans les zones C (zone transitoire) et D (zone stationnaire) met en lumière les biais dont souffrent les méthodes monochromatiques, Fig.2.

## 2- DETECTION DE L'ONDE DE CISAILLEMENT SUR LES DEPLACEMENTS

Après avoir fait subir aux signaux rétrodiffusés un premier traitement de signal d'intercorrélacion (voir chapitre II), on obtient une carte des déplacements (sismogramme, Fig.1). Ces déplacements sont analysés à leur tour par un traitement de signal. Celui-ci permet d'isoler l'onde de cisaillement et aboutit finalement à une mesure de la vitesse et de l'atténuation de cette onde. Ce traitement de signal repose de nouveau sur l'intercorrélacion. En voici le principe :

- on choisit sur les déplacements du volume le plus proche du piston une première fenêtre contenant uniquement les vibrations temporelles de l'onde de cisaillement transitoire : il s'agit Fig.1 des déplacements contenus dans la fenêtre de la zone (C) à 55 mm de profondeur.
- Ensuite par le calcul du maximum du coefficient de corrélation (chapitre II), on peut déterminer le décalage temporel qu'a subi la fenêtre sélectionnée entre la première ligne et la seconde ligne de déplacements. Ensuite le même calcul est effectué entre la seconde et la troisième ligne. La nouvelle valeur du décalage temporel est stockée dans un tableau et on réitère cette procédure jusqu'à la dernière ligne des déplacements à 18 mm de profondeur. Si  $M$  est le nombre total de lignes de déplacements (dans notre cas  $M=42$ ), le tableau contient à la fin  $M-1$  valeurs correspondant au

décalage temporel des fenêtres successives à chaque profondeur. Ce tableau répertorie un jeu de fenêtres qui contiennent les déplacements qui se ressemblent le plus d'une profondeur à l'autre. Sur la figure 1, ce jeu de fenêtres délimite la zone (C). Il s'agit des déplacements de l'onde de cisaillement. On peut alors calculer pour chacune de ces fenêtres (une par profondeur) une phase et une amplitude.

En résumé, en utilisant le même traitement de signal qu'en interférométrie speckle ultrasonore, il est possible de mesurer la phase et l'amplitude de l'onde de cisaillement sur toute la profondeur.

### 3-VITESSE DES ONDES DE CISAILLEMENT

La vitesse des ondes de cisaillement s'obtient par le calcul de la phase en fonction de la profondeur. Cette vitesse est mesurée de manière plus précise avec les modes de vibration transitoire qu'avec les modes de vibration stationnaire. Pourtant, aucune des courbes de dispersion obtenues par ces deux méthodes ne correspond aux vitesses théoriques d'un milieu viscoélastique.

#### Vitesse des ondes de cisaillement à une fréquence

La formulation mathématique de la propagation selon un axe  $z$  d'une onde plane dans un milieu infini s'exprime en utilisant la fonction " $e^{-ikz}$ ". La phase  $\phi = k z$  est donc une fonction linéaire de la variable d'espace  $z$ . La vitesse de phase de cette onde est donnée par l'équation :

$$V_{\phi} = \omega \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{-1} \quad (1)$$

Dans les expériences, la phase obtenue à partir de la zone transitoire (zone C, Fig.1), montre bien une évolution linéaire en fonction de la profondeur, Fig.2(a). La vitesse de phase est alors calculée en multipliant l'inverse de la pente des phases par la fréquence angulaire (d'après Eq.1). Elle est évaluée avec une précision de 2%. Cette précision est donnée par l'écart type des points expérimentaux par rapport à une droite ajustée. En revanche, la phase mesurée à partir de la zone stationnaire (zone D, Fig.1) n'est pas linéaire. En effet, à l'onde de cisaillement qui se propage du piston vers le transducteur se mêlent toutes les ondes réfléchies sur les bords de l'échantillon. Les interférences modifient la phase et l'amplitude (cette dernière fait l'objet du paragraphe III-4); une valeur erronée de la vitesse est alors mesurée, Fig.2(b).

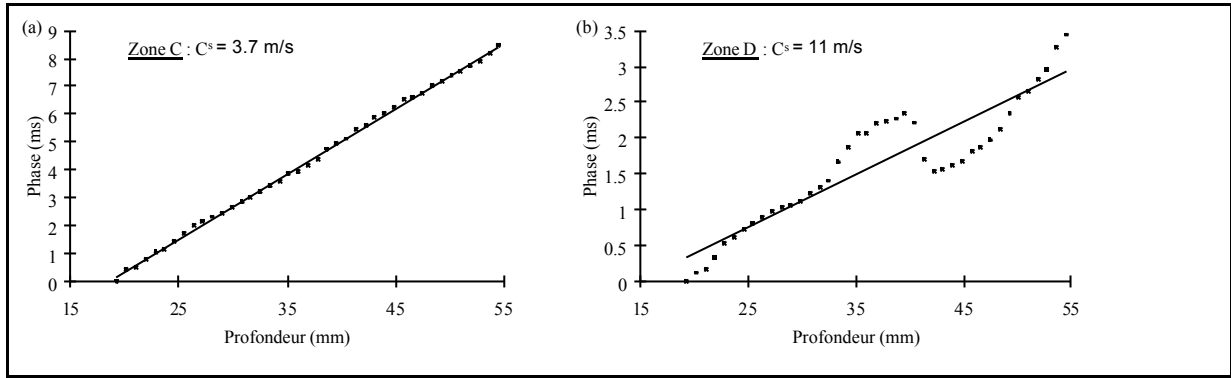


Fig.2(a) La phase est calculée à partir des déplacements de la zone transitoire (zone C) de la figure 1. (b) La phase est calculée à partir de la zone stationnaire (zone D). Celle-ci est perturbée par la présence d'ondes réfléchies sur les bords de l'échantillon.

Lorsque l'on utilise une source de vibration monochromatique, les ondes réfléchies sur les frontières de l'échantillon modifient la mesure de la vitesse de phase des ondes de cisaillement. Cette modification évolue-t-elle selon la fréquence des vibrations utilisée?

### Vitesse des ondes de cisaillement à plusieurs fréquences

#### Mode de vibrations stationnaires

Les deux courbes de dispersion de la figure 3 sont le résultat de deux expériences, l'une menée dans un muscle de boeuf et l'autre dans un gel d'agar-gélatine. Ces échantillons sont soumis depuis leur surface à des vibrations monochromatiques. Les vitesses alors obtenues sont mesurées pour des ondes en régime stationnaire comme celui qui apparaît dans la zone D de la figure 1. Ces courbes de dispersions sont donc le résultat des méthodes dynamiques utilisées en sonoélasticité. Ce type de courbes a déjà fait l'objet de publications par Sato [1] ou Kazakov et Klochkov [2]. Afin d'exposer clairement les problèmes qu'elles soulèvent, ces expériences ont été refaites en utilisant d'abord des modes de vibration monochromatique (stationnaire) et ensuite des modes de vibration transitoire.

Les fréquences de vibrations monochromatiques s'étendent de 10 à 250 Hz. Dans les deux expériences, le rayon du vibreur est de 1 cm. Le muscle de Boeuf est un «*semi-membranosus* ». Il est taillé en forme de quadrilatère de dimensions  $8 \times 8 \times 6$  cm<sup>3</sup>. La profondeur d'exploration ultrasonore s'étend de 1 à 5 cm du transducteur. Dans le gel de dimensions  $10 \times 10 \times 7$  cm<sup>3</sup>, la profondeur d'exploration s'étend de 3 à 7 cm.

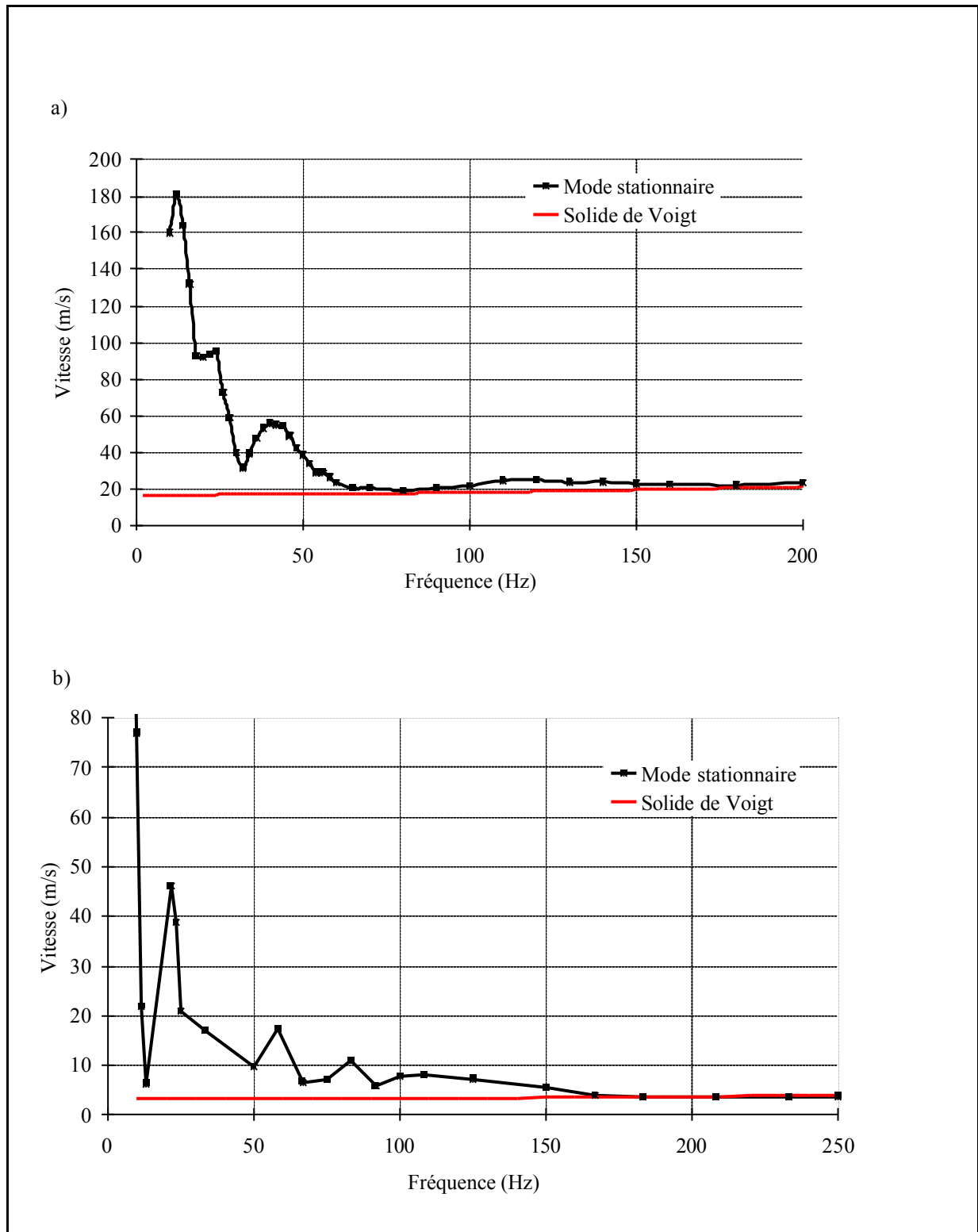


Fig.3 Vitesse d'une onde de cisaillement dans un muscle de boeuf (semi-membranosus) (a) et dans un gel d'agar-gélatine (b) soumis à des modes de vibration monochromatique (stationnaire).

Les valeurs théoriques de la vitesse de l'onde de cisaillement sont calculées grâce à une formule classique des milieux viscoélastiques, milieux que l'on nomme également « solides de Voigt » [3] :

$$C_s = \sqrt{\frac{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}{\rho [\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2}]}} \quad (2)$$

Cette formule ainsi que les calculs et les différentes hypothèses qu'elle recouvre seront examinés ultérieurement. Dans la littérature, la valeur moyenne de la masse volumique  $\rho$  des tissus biologiques est estimée à 1100 kg.m<sup>-3</sup>. La fréquence angulaire  $\omega$  est fixée expérimentalement et les coefficients de Lamé sont déterminés de manière à ajuster les valeurs théoriques aux vitesses de phases expérimentales aux fréquences élevées, Fig.3.

Voici typiquement les divergences que l'on observe entre la théorie d'un solide de Voigt et les expériences : tout d'abord la vitesse expérimentale augmente globalement lorsque la fréquence diminue, les plus grandes valeurs de vitesse de phase sont obtenues à très basse fréquence; en second lieu on observe des maxima locaux à 12, 25, 40 Hz dans le muscle de boeuf et à 25, 55, 75 Hz dans le gel d'agar-gélatine. Au regard de ces constatations, on peut se demander si ces divergences ont pour origine certaines propriétés viscoélastiques de la matière ou si elles ne sont que la conséquence des effets de réflexion des ondes sur les parois des échantillons. La réponse est donnée par l'analyse de la courbe de dispersions calculée à partir de la zone transitoire (C), Fig.1. En effet, dans cette zone, aucune réflexion n'a encore perturbé l'onde de cisaillement. La vitesse de phase ne subit pas les effets des réflexions.

### Mode de vibration transitoire

La courbe de dispersion en mode de vibration transitoire, Fig.(4), est obtenue dans un gel d'agar-gélatine. La vitesse de phase est calculée à partir des déplacements de la zone transitoire (C). Les barres d'erreurs sont déduites de l'écart type entre les valeurs de la phase expérimentale et la droite théorique ajustée par une méthode des moindres carrés.

On constate d'abord que la valeur moyenne des vitesses sur l'ensemble des fréquences est plus faible que lorsque l'on utilise la méthode monochromatique. De plus, les maxima locaux sur les vitesses ont disparu. Ils sont donc bien une manifestation des effets de réflexions des ondes sur les parois. La mesure de ces maxima n'est pas pertinente pour déterminer les paramètres

viscoélastiques. Enfin, il faut noter que l'augmentation globale de la vitesse lorsque la fréquence diminue est encore visible sur la figure 4. Pour expliquer ce comportement de la vitesse à basse fréquence, Fujii a suggéré l'idée d'une modification de la nature de l'onde de cisaillement [1]. Après avoir examiné le modèle du solide de Voigt qui conduit à l'équation de dispersion (2), une autre explication de ce phénomène basée sur la diffraction sera proposée.

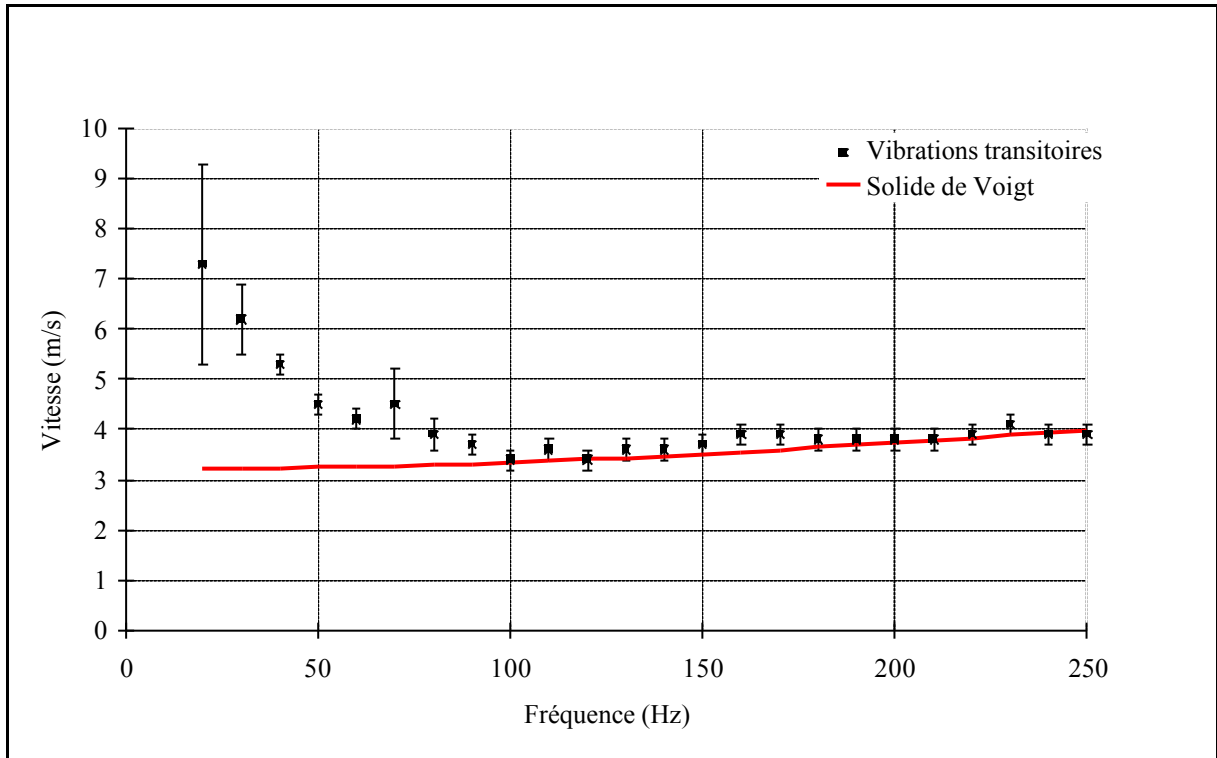


Fig.4 Vitesse de l'onde de cisaillement dans un gel d'agar-gélatine. La courbe expérimentale est mesurée à partir de modes de vibration transitoire. La courbe théorique correspond à la vitesse de phase dans un milieu viscoélastique infini (Solide de Voigt).

### Un modèle rhéologique simple : le solide de Voigt

Dans la littérature, le modèle employé pour les milieux biologiques traversés par des ondes de basse fréquence est le solide de Voigt. Cette approche simplifiée de la viscoélasticité suppose un certain nombre d'hypothèses : le matériau est isotrope, homogène et il répond linéairement à une déformation ou à une vitesse de déformation. Son comportement élastique doit donc obéir à la loi de Hooke :

$$\sigma = G \varepsilon \quad (\text{solide parfaitement élastique}) \quad (3)$$

Cette loi exprime de façon générale la relation de proportionnalité entre une contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  qu'elle engendre. Le coefficient de proportionnalité  $G$  est le coefficient élastique.

Le comportement visqueux du solide de Voigt doit être newtonien (réponse linéaire de la contrainte à une vitesse de déformation) :

$$\sigma = \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (\text{solide visqueux}) \quad (4)$$

Selon la loi de Newton, la contrainte exercée sur un corps visqueux est proportionnelle à la dérivée temporelle de la déformation. Le coefficient de proportionnalité  $\nu$  est le coefficient de viscosité. Le comportement du solide de Voigt est donc régi par l'équation différentielle de comportement suivant :

$$\sigma = (G + \nu \frac{\partial}{\partial t}) \varepsilon \quad (5)$$

Cette description de la viscoélasticité d'un solide de Voigt est très générale. Une approche tensorielle plus rigoureuse est décrite au paragraphe suivant. L'analogue tensoriel de l'expression (5) est donné en fonction des coefficients de Lamé par l'équation (7).

#### Rappel général sur la résolution de l'équation de propagation dans un solide infini isotrope

La relation fondamentale de la dynamique s'exprime en terme de tenseur de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} + \rho X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (j=1,2,3) \quad (6)$$

Dans cette équation,  $T_{jk}$  est le tenseur des contraintes,  $x_k$  une variable d'espace,  $\rho X_j$  une source de contrainte,  $\rho$  la masse volumique et  $u_j$  est une composante du déplacement. Afin de résoudre cette équation, il faut maintenant faire des hypothèses sur la nature de la contrainte qui s'exerce à l'intérieur du milieu de propagation : on suppose, dans un solide de Voigt, que la contrainte est Hookéenne et Newtonienne.

$$\begin{aligned} T_{jj} &= \underbrace{2\mu_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \lambda_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\text{élasticité}} + \underbrace{2\mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\text{viscosité}} \\ T_{jk} &= \underbrace{\mu_1 \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{élasticité}} + \underbrace{\mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{viscosité}} \end{aligned} \quad (7)$$



En injectant le tenseur des contraintes dans (6), et en faisant l'hypothèse de contrainte volumique nulle ( $\rho X_j = 0$ ), on obtient l'équation de propagation :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = [(\mu_1 + \lambda_1) + (\mu_2 + \lambda_2) \frac{\partial}{\partial t}] \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{u} + (\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t}) \Delta \vec{u} \quad (8)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement,  $\lambda_1$  l'élasticité de compression,  $\lambda_2$  la viscosité de compression,  $\mu_1$  l'élasticité de cisaillement et  $\mu_2$  la viscosité de cisaillement.

Il existe deux types de solution simple à cette équation : les solutions irrotationnelles ou solénoïdale (divergence nulle). Les premières sont des ondes qui se propagent en modifiant localement le volume du milieu. Ce sont les ondes de compression. Les secondes se propagent en déformant le milieu sans en changer le volume, ce sont les ondes de cisaillement

Pour une onde monochromatique, l'opérateur de dérivée temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  est équivalent à une multiplication par le scalaire  $i\omega$ . Pour la solution irrotationnelle, l'équation de propagation devient :

$$\Delta \vec{u} + \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \vec{u} = 0 \quad (9)$$

Dans cette équation (8) les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont désormais complexes.

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_1 + i\omega \lambda_2 \\ \mu = \mu_1 + i\omega \mu_2 \end{cases} \quad (10)$$

Dans le cas d'une onde plane, la quantité  $\frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}$  est la norme du vecteur d'onde au carré (lui aussi complexe).

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \quad (11)$$

On en déduit la vitesse et l'atténuation de l'onde de compression.

$$C_p = \frac{\omega}{\text{Re}[k]} \Rightarrow C_p = \sqrt{\frac{2[(\lambda_1 + 2\mu_1)^2 + \omega^2(\lambda_2 + 2\mu_2)^2]}{\rho [(\lambda_1 + 2\mu_1) + \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)^2 + \omega^2(\lambda_2 + 2\mu_2)^2}]}} \quad (12)$$

$$\alpha_p = \text{Im}[k] \Rightarrow \alpha_p = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 [(\lambda_1 + 2\mu_1) + \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)^2 + \omega^2(\lambda_2 + 2\mu_2)^2}]}{2[(\lambda_1 + 2\mu_1)^2 + \omega^2(\lambda_2 + 2\mu_2)^2]}} \quad (13)$$

Pour une onde monochromatique à divergence nulle l'équation de propagation est :

$$\Delta \vec{u} + \frac{\rho \omega^2}{\mu} \vec{u} = 0 \quad (14)$$

Dans le cas d'une onde plane, le carré du vecteur d'onde s'écrit,

$$h^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu} \quad (15)$$

on en déduit la vitesse et l'atténuation de l'onde de cisaillement.

$$C_s = \frac{\omega}{\text{Re}[h]} \Rightarrow C_s = \sqrt{\frac{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}{\rho [\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2}]}} \quad (16)$$

$$\alpha_s = \text{Im}[h] \Rightarrow \alpha_s = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 [\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2} - \mu_1]}{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}} \quad (17)$$

### Transformation isotherme ou adiabatique?

En acoustique ultrasonore, les constantes élastiques contenues dans les équations de propagation sont des coefficients adiabatiques. Ceci est parfaitement justifié dans le cas des ondes ultrasonores se propageant dans des matériaux homogènes car les sollicitations mécaniques lors du passage des ondes sont des phénomènes très brefs devant le temps de propagation des flux de chaleur. Dans certains milieux poreux, les échanges de chaleur sont rendus très rapides par la coexistence de deux phases (solide et liquide) de capacité calorifique très différente en contact sur une surface importante (plus le milieu est poreux, plus la surface d'échange est grande). De surcroît, ces échanges de chaleur sont facilités par la relative lenteur des ondes sonores. Ainsi, dans les aérogels de silice, matériaux poreux à 90%, la vitesse des ondes de compression peut atteindre une centaine de mètres par seconde. Par comparaison, elle est de 340 m.s<sup>-1</sup> dans l'air et de 6000 m.s<sup>-1</sup> dans la silice. Dans de tels milieux, le comportement de l'onde n'est pas bien décrit par les coefficients élastiques adiabatiques. Certes, les tissus biologiques ne sont pas des matériaux poreux. Toutefois, la lenteur des ondes de cisaillement (environ 4 m/s contre 1500 m/s pour les ondes de

compression) peut-elle s'expliquer par des phénomènes de transformation isotherme<sup>i</sup>? La faible vitesse des ondes de cisaillement permet-elle que s'établissent des échanges de chaleur?

Si l'on compare le temps caractéristique d'une onde de cisaillement qui se propage (sa période) au temps que met un flux de chaleur pour parcourir une distance caractéristique (la longueur d'onde de cisaillement), on obtient les valeurs numériques suivantes :

Période de l'onde de cisaillement :

$T=0,33.10^{-2}$  s à 300 Hz et  $T=0,1$  s à 10 Hz.

Longueur d'onde de cisaillement ( $\lambda_s=C_s/v$ ) :

$C_s = 4$  m/s est la vitesse typique de l'onde de cisaillement alors,  $\lambda_T=0,01$  m à 300 Hz et  $\lambda_T=0,4$  m à 10 Hz.

Temps de diffusion  $T_d$  sur la distance d'une longueur d'onde de cisaillement  $\lambda_T$  ( $T_d=\pi (\lambda_T)^2/C_d$ ):

$C_d=15.10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s est la vitesse typique de diffusion d'un flux de chaleur dans les tissus biologiques alors,  $T_d=0,2.10^4$  s à 300 Hz et  $T_d=33.10^4$  s à 10 Hz.

Le temps de propagation d'un flux de chaleur sur un disque de rayon égal à une longueur d'onde de cisaillement est supérieur d'un facteur  $10^6$  à une période de cette onde :  $T_d \gg T$ .

Par conséquent, malgré la faible vitesse des ondes de cisaillement, les transformations mises en jeu lors de la propagation de ces ondes sont adiabatiques : il est donc raisonnable d'adopter un modèle de transformation avec des coefficients élastiques adiabatiques.

### Effet de diffraction sur la dispersion

L'équation de dispersion (2) dans un solide de Voigt donne la vitesse d'une onde plane dans un milieu infini. Or, dans les articles portant sur la sonoélasticité, le rayon des pistons circulaires utilisés varie typiquement de 10 à 70 mm. Pour des vitesses de 4 m/s la longueur d'onde est de 150 mm à 20 Hz et de 10 mm à 300 Hz. Par conséquent, la taille du piston circulaire n'est pas négligeable devant la longueur d'onde. L'approximation d'onde plane qui sous tend les calculs des

---

<sup>i</sup> Les modules d'élasticité volumiques isotherme  $K_T$  et adiabatique  $K_S$  sont liés par la relation  $K_S = \frac{C_P}{C_V} K_T$ .

Comme la capacité calorifique à pression constante  $C_P$  est supérieure à la capacité calorifique à volume constant, il vient:  $K_S > K_T$ . L'onde adiabatique se propage donc plus vite que l'onde isotherme.

vitesse dans un solide de Voigt est prise en défaut à cause des phénomènes de champ proche. C'est pourquoi une formulation de la dispersion qui prend en compte les effets de diffraction de la source est présentée ici.

Un calcul simple du champ de déplacement selon l'axe du piston circulaire dans un solide de Kelvin-Voigt est développé dans ce paragraphe. A. Lhemery [4] a montré que dans un solide semi-infini avec des conditions libres aux frontières (conditions de Dirichlet), les déplacements en champ lointain sont donnés par une solution approchée qui ressemble à l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld. Celle-ci décrit le potentiel acoustique rayonné par une source de vitesse particulière. Les prédictions des déplacements sont en bon accord avec les solutions numériques exactes, même en champ proche. La solution mathématique exacte des déplacements générés par une source ponctuelle a été calculée par Gakenheimer et Miklowitz. Elle montre que les déplacements mécaniques d'un piston se propagent à travers les tissus biologiques préférentiellement sous la forme d'une onde de cisaillement (pour les détails, se référer au paragraphe *Une solution analytique à une excitation monochromatique* de ce chapitre). Oestrecher [5] est arrivé à cette même conclusion en étudiant l'impédance mécanique des milieux biologiques. Par conséquent, la composante longitudinale (selon l'axe des  $z$ ) des déplacements sera calculée en ignorant l'onde de compression d'une part et en utilisant la solution de Rayleigh-Sommerfeld d'autre part. Sur l'axe du piston, cette solution dépend de  $V_n$ , l'amplitude maximum de la vitesse de déplacement du piston, de  $a$  son rayon, de la profondeur  $z$  sur l'axe du piston et de  $k$  le vecteur d'onde de cisaillement.

$$V_z(z, t) = -V_n e^{i(\omega t - k z)} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \exp(-ik(\sqrt{z^2 + a^2})) - 1 \right] \quad (18)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$V_z(z, t) = V_o \exp[i(\omega t - k z + \varphi(z))] \quad (19)$$

$\varphi(z)$  est un terme de phase introduit par la diffraction du piston.

Dans un solide de Voigt,  $k$  est donné par l'équation suivante :

$$k = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\mu_1 + i \omega \mu_2}} \quad (20)$$

Finalement, la vitesse de phase qui prend en compte les effets de diffraction se calcule à partir de l'équation (21) :

$$c^* = \frac{\omega}{\text{Re}(k - \frac{\partial \varphi}{\partial z})} \quad (21)$$

On obtient alors l'expression suivante pour la vitesse de phase :

$$c^*(\omega) = \frac{\omega}{\operatorname{Re} \left\{ k + \frac{\partial}{\partial z} \left( z \operatorname{atan} \left[ \frac{\sin(k z (\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - 1))}{\cos(k z (\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - 1)) - \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} \right] \right) \right\}} \quad (22)$$

En champ lointain ( $z \gg a$ ), l'équation (22) tend bien vers l'expression classique d'une onde plane dans un solide infini. Dans le cas intermédiaire où la profondeur d'observation est comparable au rayon du piston ( $z \sim a$ ) et pour des fréquences élevées, le terme en *arc tangente* est négligeable devant  $k$  et on trouve de nouveau l'expression de la vitesse d'une onde plane dans un milieu infini. En revanche cette vitesse croît si la fréquence  $\omega$  diminue ou si le rayon du piston  $a$  augmente. Ces résultats sont vérifiés expérimentalement (Fig.5 et Fig.6).

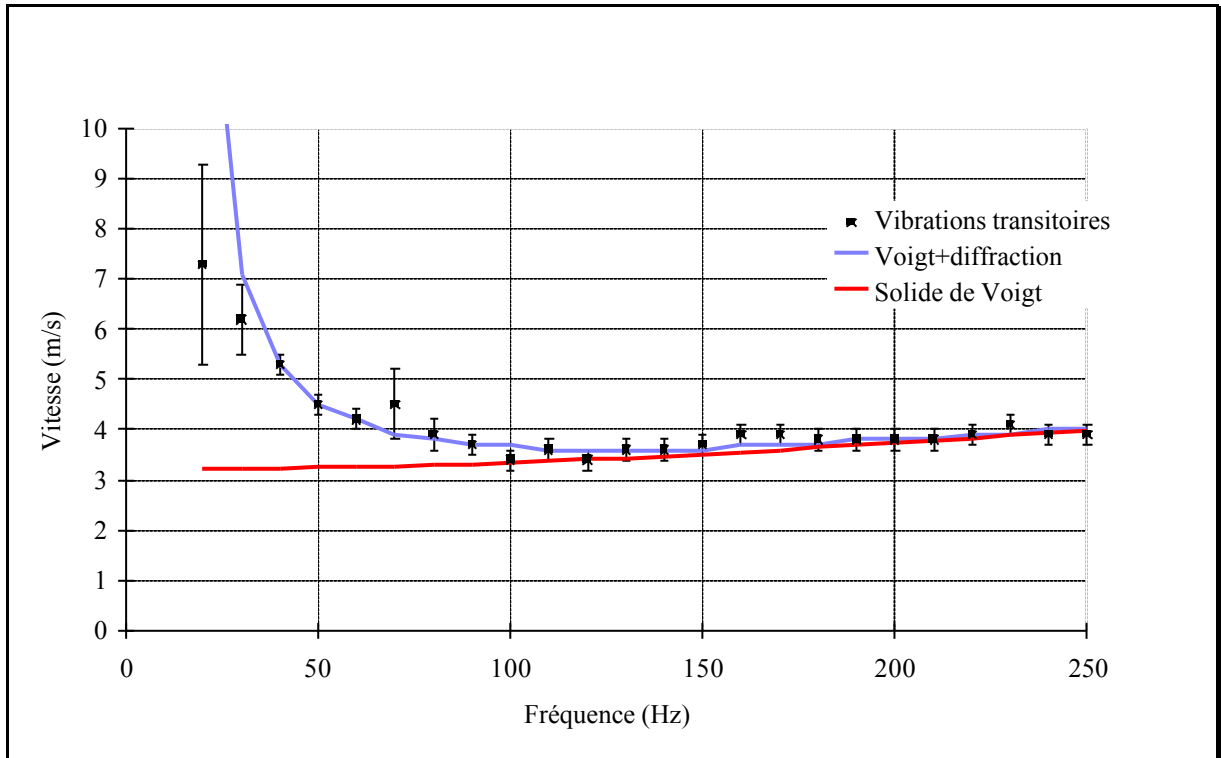


Fig.5 Vitesse d'une onde de cisaillement dans un gel d'agar-gélatine. Les mesures expérimentales sont comparées aux vitesses théoriques dans un solide de Voigt (2) et aux vitesses modifiées par la diffraction (22).

La vitesse de phase donnée par l'équation (22) explique bien les courbes de dispersion expérimentales. Pourtant, une déviation apparaît Fig.5 sur les deux premiers points de la courbe, à 10 et 20 Hz. Il s'agit sans doute d'une conséquence de l'approximation qui consiste à négliger dans notre modèle l'existence d'une onde de compression de basse fréquence. La solution approchée du champ généré par une source monochromatique ponctuelle dans un milieu semi-infini (26) montre en effet que cette onde de compression ne peut être négligée aux fréquences inférieures à 60 Hz.

La figure 6 montre que la vitesse de phase dépend du rayon du piston : cette vitesse est plus élevée pour des pistons étendus. Pour un rayon du piston de 2 cm, la vitesse de l'onde de cisaillement est d'environ 3.6 m/s. Pour un rayon de 0,5 cm elle n'est plus que de 3.3 m/s. Ce résultat est prévu par l'équation (22).

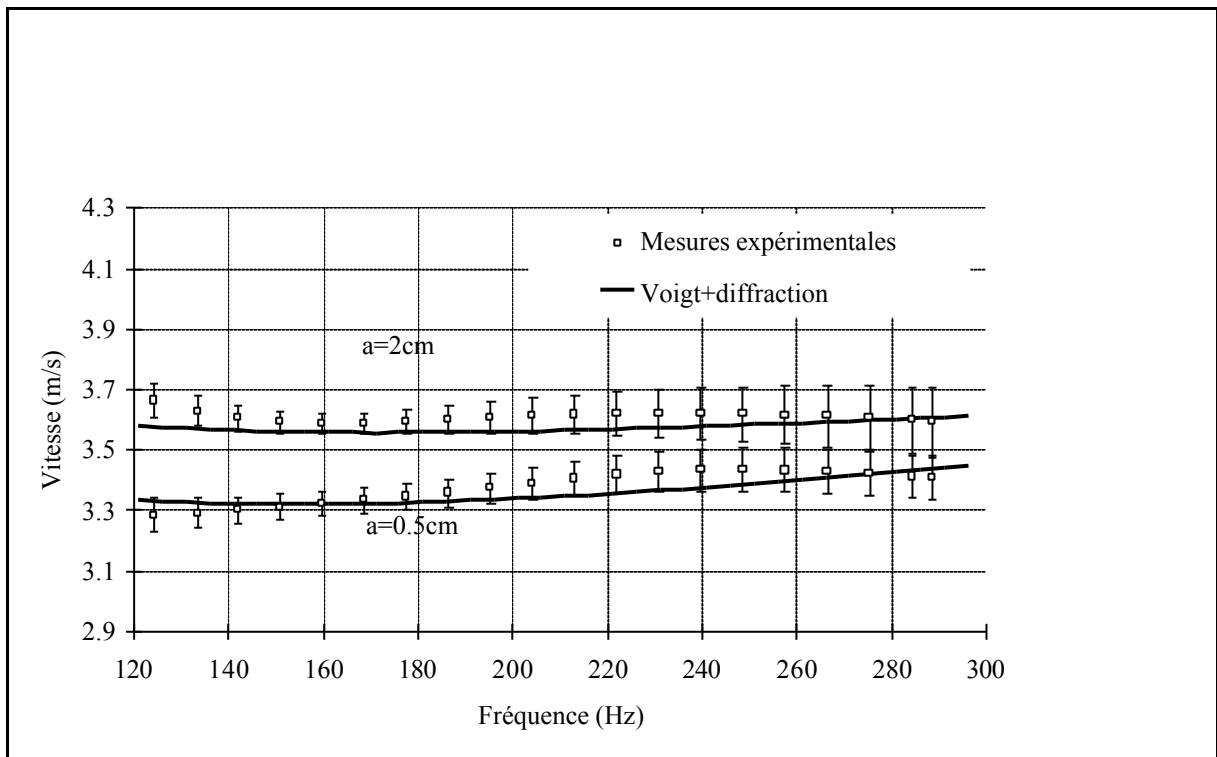


Fig.6 La vitesse de phase de l'onde de cisaillement dépend de la taille du piston utilisé. Les mesures expérimentales et théoriques (Eq.22) sont comparées pour des rayons de 0.5 cm et 2 cm.

En résumé, les effets de réflexions d'ondes sur les frontières et de diffractions sont à l'origine de l'écart entre les vitesses expérimentales et les vitesses théoriques des ondes de cisaillement. Les études ont porté jusqu'ici sur la vitesse de phase. Quels sont les effets de réflexions d'ondes ou de diffractions sur l'atténuation?

#### 4-ATTENUATION DES ONDES DE CISAILLEMENT

L'impact des réflexions d'ondes sur les frontières peut empêcher toute mesure d'atténuation sur les modes de vibration stationnaire. Les modes de vibration transitoire quant à eux mettent en évidence un phénomène de diffraction analogue à ce qui est observé dans la zone de Fresnel : apparition de maxima sur l'amplitude des déplacements. La différence tient à ce que ce phénomène apparaît aussi lorsque l'ouverture de la source est infiniment petite (source ponctuelle).

##### Atténuation à une fréquence

L'atténuation est calculée à partir des mesures d'amplitudes de l'onde de cisaillement. Les amplitudes dans la zone stationnaire (D) Fig.1 sont représentées sur la figure (7). Elles résultent de l'interférence de l'onde directe avec les ondes réfléchies sur les parois et par conséquent, il est difficile d'en déduire une valeur d'atténuation fiable. Si l'on compare les amplitudes obtenues à partir de la zone transitoire (C) à une décroissance exponentielle, on constate que, dans ce cas, l'atténuation peut être évaluée approximativement.

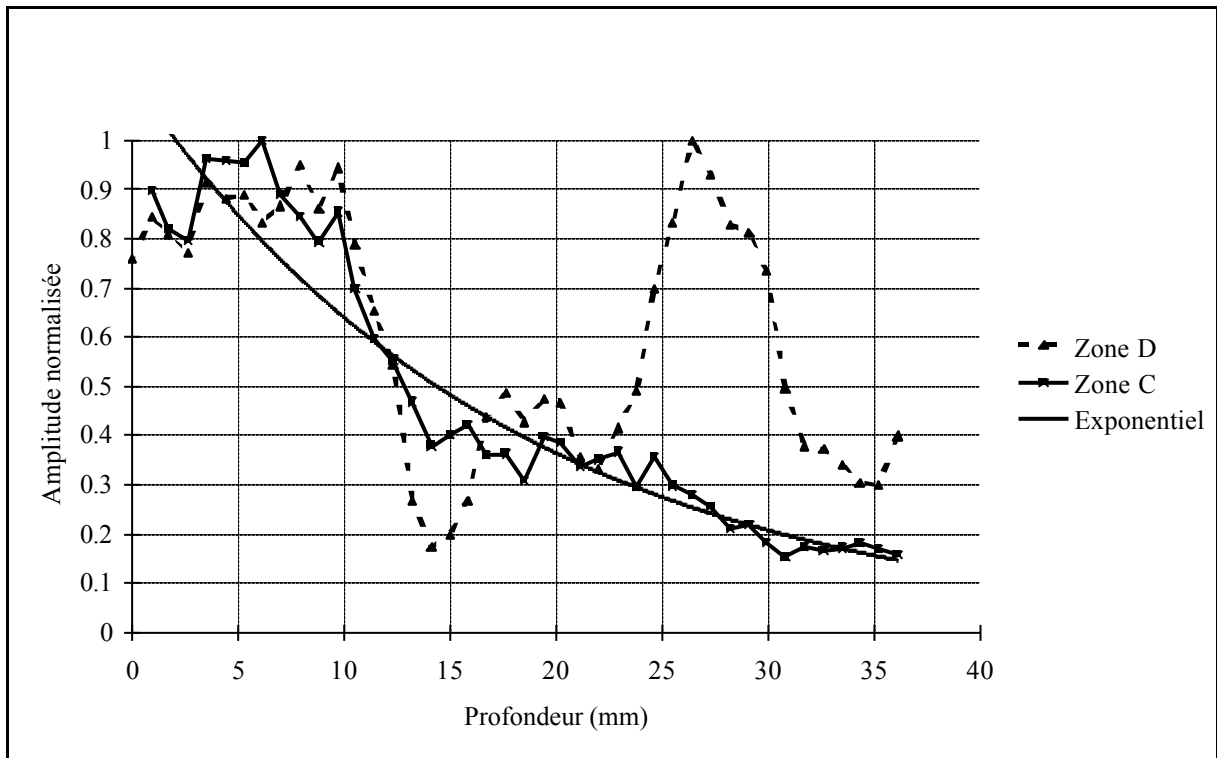


Fig.7 L'amplitude des déplacements est calculée à partir du sismogramme, Fig.1. Dans la zone transitoire (C), la diminution d'amplitude est proche d'une décroissance exponentielle.

*L'amplitude dans la zone stationnaire (D) est le résultat d'interférences avec les ondes réfléchies sur les parois.*

Les variations brusques d'amplitudes obtenues dans la zone transitoire (C) par rapport à une décroissance de type exponentielle ne peuvent être attribuées ni à l'interférence entre les ondes directes et les ondes réfléchies, ni à des effets de champ proche; la zone de Fresnel se trouve théoriquement confinée à 0.15 cm du piston (rayon du piston de 0.5 cm, longueur d'onde de 1.5 cm). En fait, il s'agit ici d'un phénomène de diffraction d'un type un peu particulier. La résolution des équations de propagation dans le cas d'une force ponctuelle appliquée normalement à la surface d'un solide élastique semi-infini aboutit aux fonctions de Green. Celles-ci montrent qu'une source ponctuelle génère sur l'axe les composantes longitudinales d'une onde de compression et d'une onde de cisaillement; ces composantes peuvent donc interférer et conduire à l'apparition de maximum et de minimum sur l'amplitude.

### **Calcul de la fonction de Green**

Les fonctions de Green décrivent le champ de déplacement en fonction du temps et de l'espace généré par une source de force ponctuelle. Dans les solides élastiques, ces fonctions de Green ont été calculées par Gakenheimer et Miklowitz [6] pour un échelon de contrainte. Par conséquent, afin d'obtenir ces solutions dans le cas d'une force ponctuelle impulsionnelle, cette solution est dérivée temporellement. Ce calcul est présenté en annexe B. La fonction de Green sur l'axe de la source est notée  $G_{zz}^o$ . Elle décrit le déplacement longitudinal (selon l'axe des  $z$ , Fig.8) de la matière située sur l'axe de la force ponctuelle. Dans les expériences présentées dans ce chapitre, c'est à cette composante que l'on accède car l'interférométrie speckle ultrasonore ne permet de mesurer que les déplacements selon l'axe du faisceau ultrasonore.  $G_{zz}^o$  est le résultat de la contribution d'une onde de compression et d'une onde de cisaillement.

$$G_{zz}^o = G_{zz}^S + G_{zz}^P \quad (23)$$



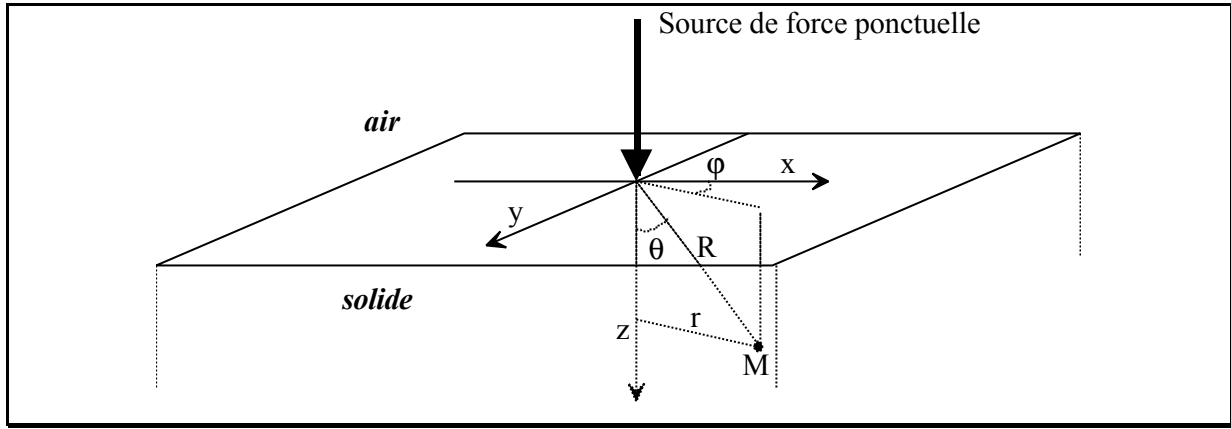


Fig.8 : Illustration des coordonnées utilisées pour caractériser les déplacements : coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et coordonnées sphériques  $(R, \theta, \varphi)$ . Dans ce chapitre, le point d'observation  $M$  est sur l'axe  $z$ .

Cette fonction de Green n'est pas encore tout à fait adaptée à notre problème : en effet, il est montré au chapitre II que c'est la vitesse particulaire qui est mesurée expérimentalement. Par conséquent, pour comparer les résultats théoriques aux résultats expérimentaux, il est nécessaire de

dériver temporellement cette fonction de Green  $\frac{\partial G_{zz}^o}{\partial t}$ . Les fonctions du temps  $G_{zz}^o$  et  $\frac{\partial G_{zz}^o}{\partial t}$

sont représentées sur la figure 9. On distingue sur la courbe de la fonction de Green  $G_{zz}^o$ , Fig.9(a), une impulsion  $\delta$  (du type Dirac) au temps d'arrivée des ondes de compression  $t_p$ . Après un accroissement quasi linéaire à partir du temps  $t_p$  jusqu'au temps d'arrivée des ondes de cisaillement  $t_s$ , la courbe décroît rapidement vers zéro. Sur la courbe de la dérivée temporelle de la fonction de Green, Fig.9(b), l'onde de compression apparaît sous la forme d'une dérivée d'une fonction de Dirac  $\delta'$ , l'onde de cisaillement sous celle d'un Dirac négatif. Sur la figure, ces deux types d'ondes sont reliés par une fonction marche.

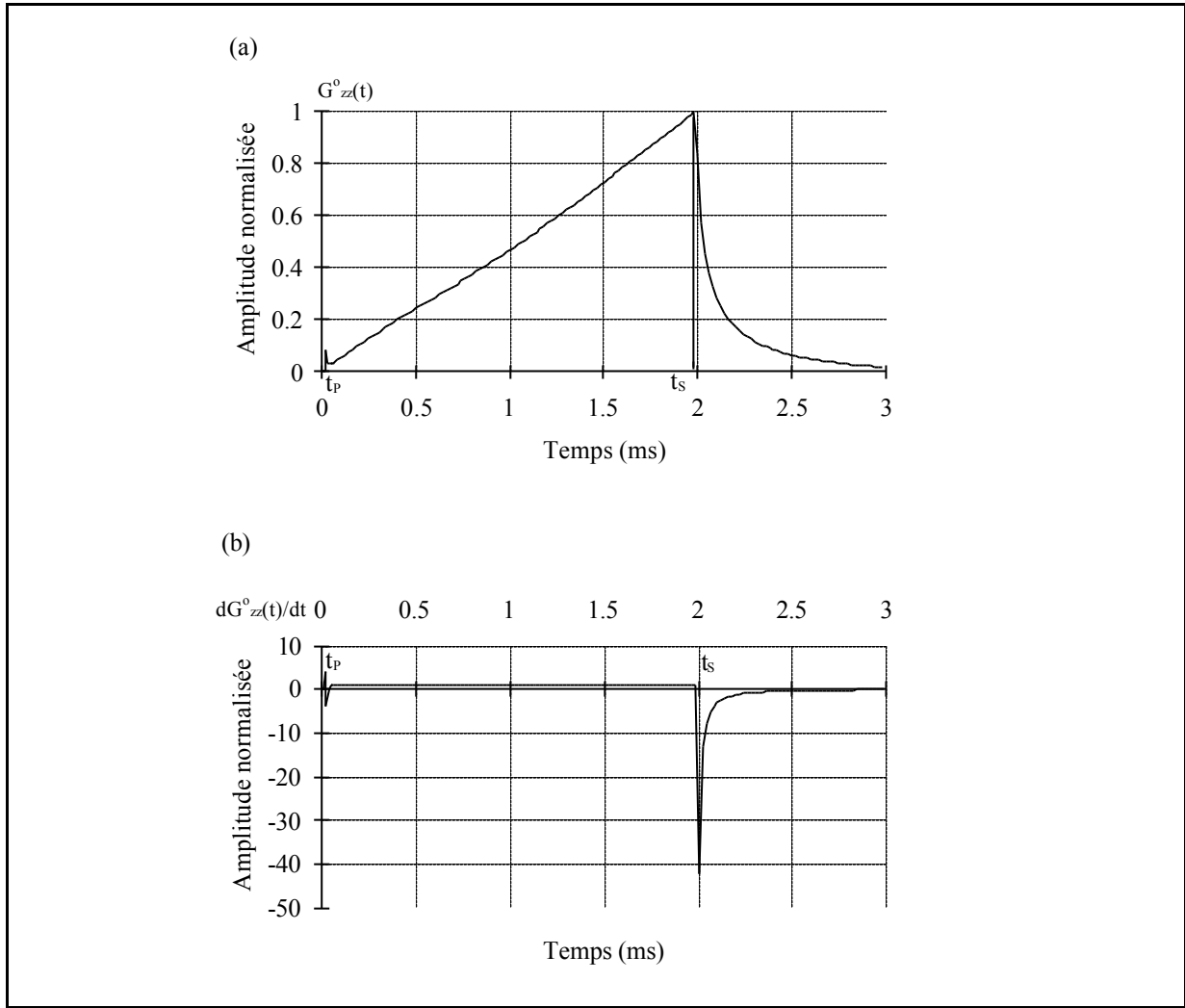


Fig.9 Fonction de Green (a) et sa dérivée temporelle (b) calculées dans des gels, sur l'axe du piston, à 2 cm de profondeur avec un échantillonnage de 1 MHz.

### Fonction de Green dans divers solides

Sur les courbes représentant la fonction de Green et sa dérivée, Fig.9(a) et Fig.9(b), l'amplitude de l'onde de cisaillement est prépondérante. Ceci est une caractéristique des tissus biologiques. Dans les métaux par exemple, la composante longitudinale de l'onde de cisaillement sur l'axe de la source est négligeable. Pour trois solides élastiques, les fonctions de Green sur l'axe sont affichées, Fig.10.

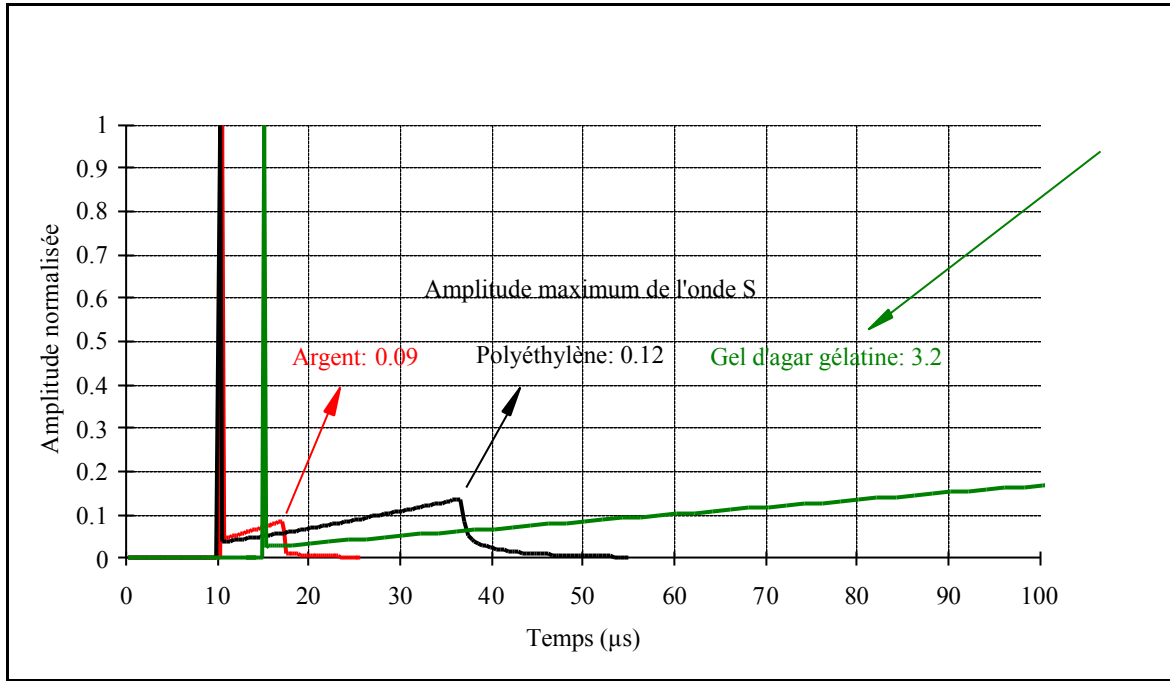


Fig.10 : Fonctions de Green sur l'axe de la source, à 2 cm de profondeur, normalisée par rapport au déplacement de l'onde de compression. L'amplitude des déplacements de l'onde de cisaillement est de 0.09 (unité arbitraire) pour l'argent, 0.12 pour le polyéthylène et de 3.2 pour les tissus biologiques.

L'allure générale des fonctions de Green, Fig.10, est la même pour l'argent, le polyéthylène et les tissus biologiques. La différence réside dans l'amplitude de l'onde de cisaillement par rapport à celle de l'onde de compression. Pour une amplitude choisie arbitrairement égale à 1 pour l'onde de compression, l'amplitude de l'onde de cisaillement est de 0.09 dans l'argent, de 0.12 dans le polyéthylène et de 3.2 dans les tissus biologiques. L'amplitude de déplacement de cette onde est d'autant plus importante que le temps d'arrivée de ces ondes est grand devant le temps d'arrivée des ondes de compression. Or, le rapport de la vitesse de l'onde de compression sur celle de l'onde de cisaillement, appelé  $\gamma$ , est radicalement différent dans les trois milieux, table(1) : il vaut 1.7 dans l'argent, 2.5 dans le polyéthylène et atteint 300 dans les tissus biologiques. Autrement dit, dans les tissus biologiques, le temps d'arrivée des ondes de cisaillement est approximativement 300 fois plus grand que celui des ondes de compression. Par conséquent, la composante longitudinale de l'onde de cisaillement sur l'axe de la source est beaucoup plus importante dans les tissus biologiques que dans les métaux.

	Vitesse de l'onde de compression	Vitesse de l'onde de cisaillement	$\gamma = V_p/V_s$
Gel d'agar-gélatine	1500 m/s	5 m/s	300
Polyéthylène	1900 m/s	750 m/s	2.5
Argent	1950 m/s	1150 m/s	1.7

Tableau 1 : Vitesse des ondes de compression, de cisaillement et le coefficient  $\gamma = C_p/C_s$  dans 3 matériaux différents.

Le choix de ces matériaux s'est effectué en fonction de la vitesse de l'onde de compression de manière à obtenir des fonctions de Green voisines sur l'axe temporel et donc facilement comparables. A travers ces exemples, on constate que la particularité des fonctions de Green dans les tissus biologiques tient au caractère dominant des déplacements de l'onde de cisaillement sur l'onde de compression.

### Validité des déplacements synthétiques obtenus par les fonctions de Green

La vitesse particulière selon l'axe  $z$  à une profondeur  $z_0$  est obtenue par le calcul de la convolution entre la dérivée temporelle de la fonction de Green,  $\frac{\partial G_{zz}^0}{\partial t}$  et l'excitation temporelle de la force ponctuelle,  $F(t)$  :

$$V_z(z_0, t) = \frac{\partial G_{zz}^0}{\partial t} \otimes F(t) \quad (24)$$

Les vitesses particulières théoriques sont affichées sous forme d'un sismogramme sur la figure 12 lorsque l'excitation temporelle de la force ponctuelle est une sinusoïde amortie de fréquence centrale égale à 150 Hz, Fig. 11.

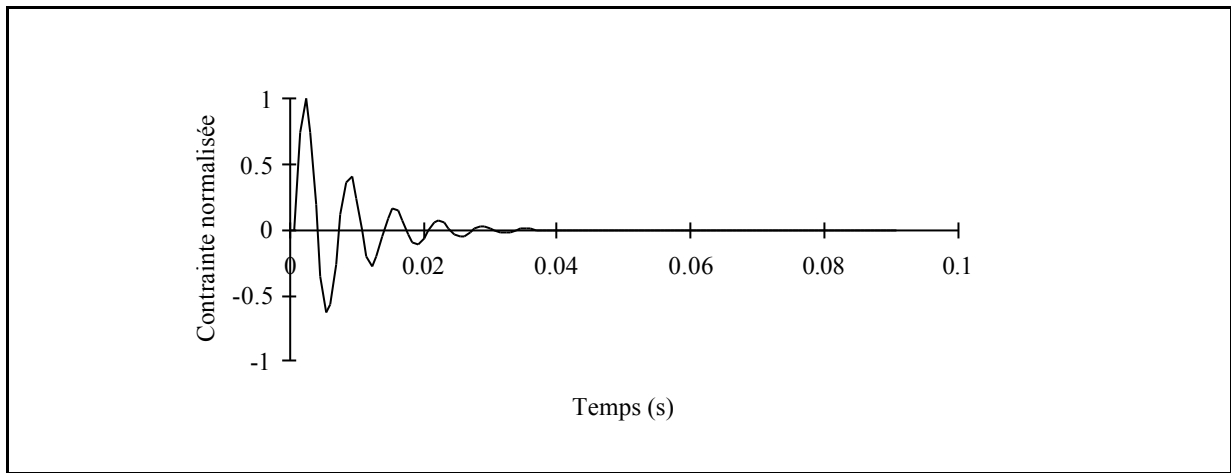


Fig.11 : Forme temporelle théorique de la contrainte imposée par la source ponctuelle : une sinusoïde amortie.

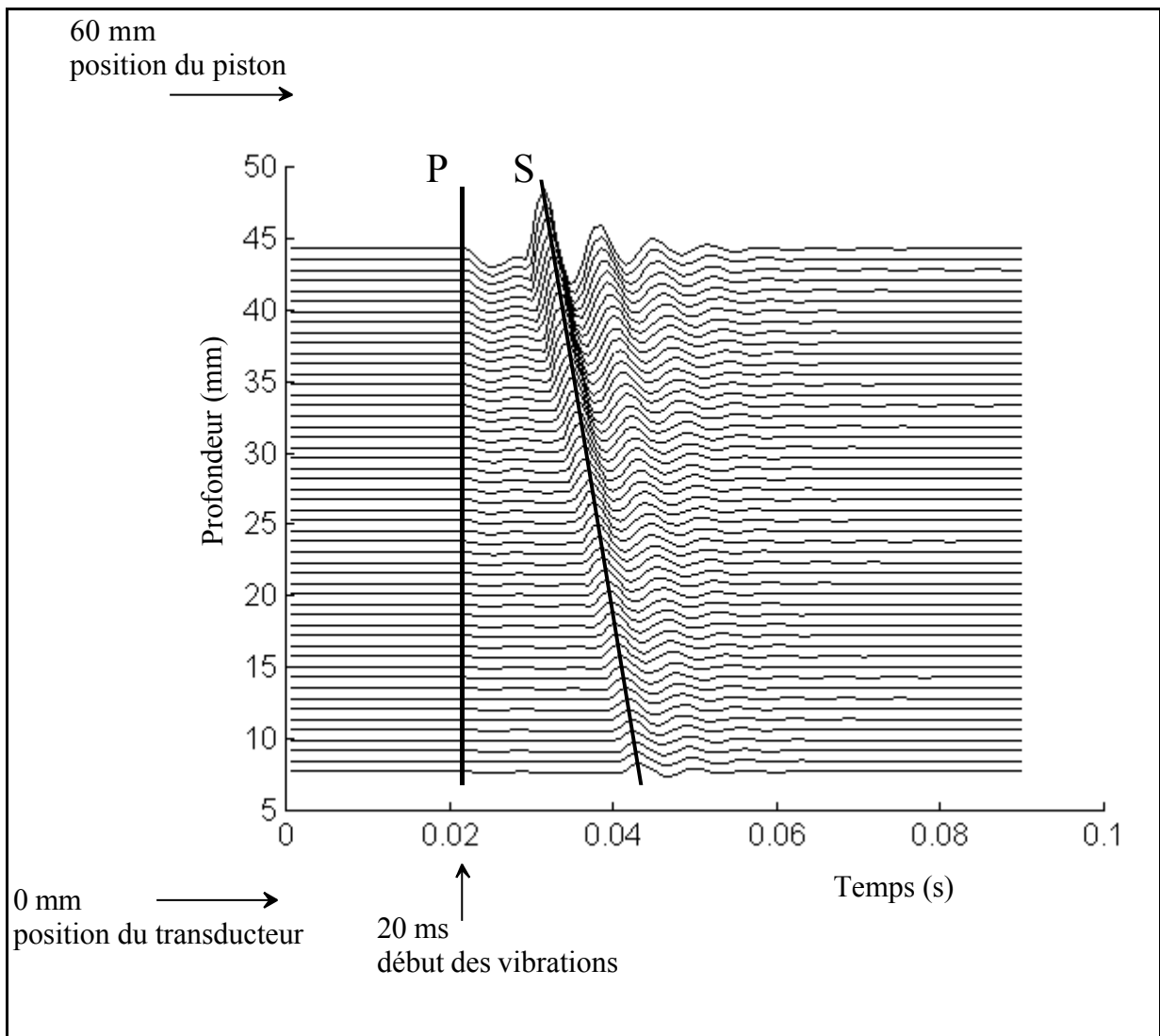


Fig.12 : Déplacements synthétiques calculés à partir de la fonction de Green d'un solide élastique selon l'axe d'une source de force ponctuelle. L'excitation de la source est une

sinusoïde amortie de 150 Hz. On distingue les déplacements dus à une onde de compression (P) et à une onde de cisaillement (S).

Les déplacements théoriques de la figure 12 doivent être comparés aux mesures expérimentales effectuées dans un gel d'agar-gélatine, Fig.13. Les vibrations du piston débutent au temps  $t_0=0.02$  s sur le sismogramme synthétique et au temps  $t_0=0.01$  s sur le sismogramme expérimental. Dans les deux cas, le piston est placé à 60 mm et le transducteur est à l'origine des profondeurs.

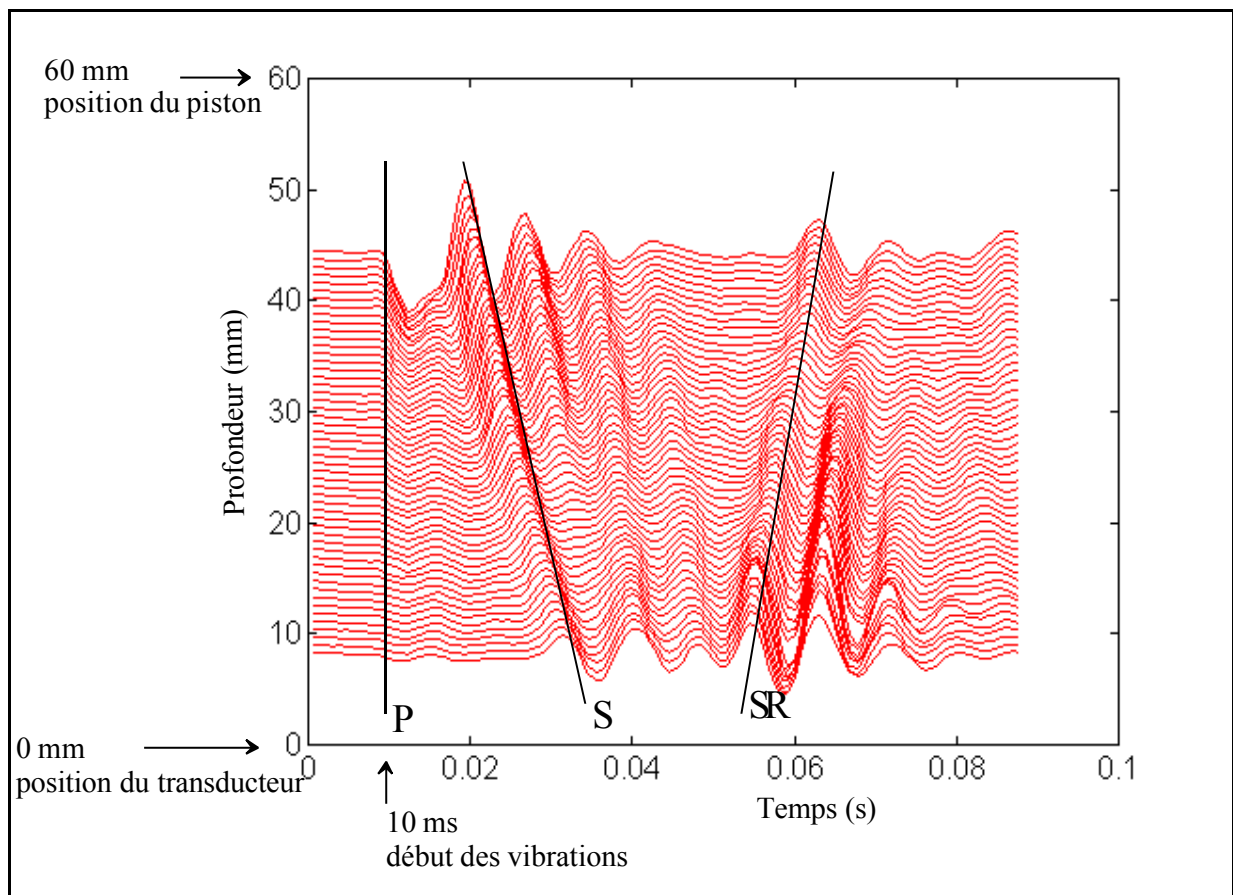


Fig.13 Déplacements expérimentaux obtenus dans un gel d'agar-gélatine sur l'axe d'un piston de rayon 0.5 cm. L'excitation de la source est une sinusoïde amortie de 150 Hz. On distingue les déplacements dus à une onde de compression (P), à une onde de cisaillement (S) et à une onde de cisaillement retour (SR).

Sur les deux figures, (12) et (13), les déplacements dus à la propagation d'une onde de compression (P) et d'une onde de cisaillement (S) apparaissent clairement : la comparaison entre

les déplacements synthétiques et expérimentaux permet d'identifier de façon certaine la nature des ondes responsables des déplacements. Les différences que l'on peut toutefois noter sont reliées à la taille du milieu; sur la figure 12 (théorie), il est semi-infini ce qui exclut l'existence des ondes réfléchies sur les bords. En revanche, elles apparaissent inmanquablement dans un échantillon de 60 mm de profondeur (SR), Fig.13. Malgré tout, la fonction de Green donne une bonne idée du comportement des tissus biologiques lorsqu'ils sont soumis aux vibrations d'une force ponctuelle. Son étude permet de mieux comprendre les erreurs expérimentales commises sur l'amplitude ou la phase et de prévoir le comportement d'un solide soumis à des vibrations sur une gamme de fréquences très étendue.

### Approximation de la fonction de Green dans les tissus biologiques : une solution analytique à une excitation monochromatique

Une approximation autour des temps d'arrivée des ondes de compression et de cisaillement conduit à une expression simplifiée de la fonction de Green (voir Annexe C) :

$$\frac{\partial G_{zz}}{\partial t} \approx \frac{C_p}{2\pi \mu z} \left\{ \delta'(t-t_p) \frac{t}{\gamma^2} + [Y(t-t_p) - Y(t-t_s)] \frac{2}{\gamma^2 t_p} + [\delta(t-t_p) - \delta(t-t_s)] \frac{2t}{\gamma^2 t_p} - \frac{4\delta(t-t_s)}{\gamma^2} + \frac{\delta(t-t_p)}{\gamma^2} \right\} \quad (25)$$

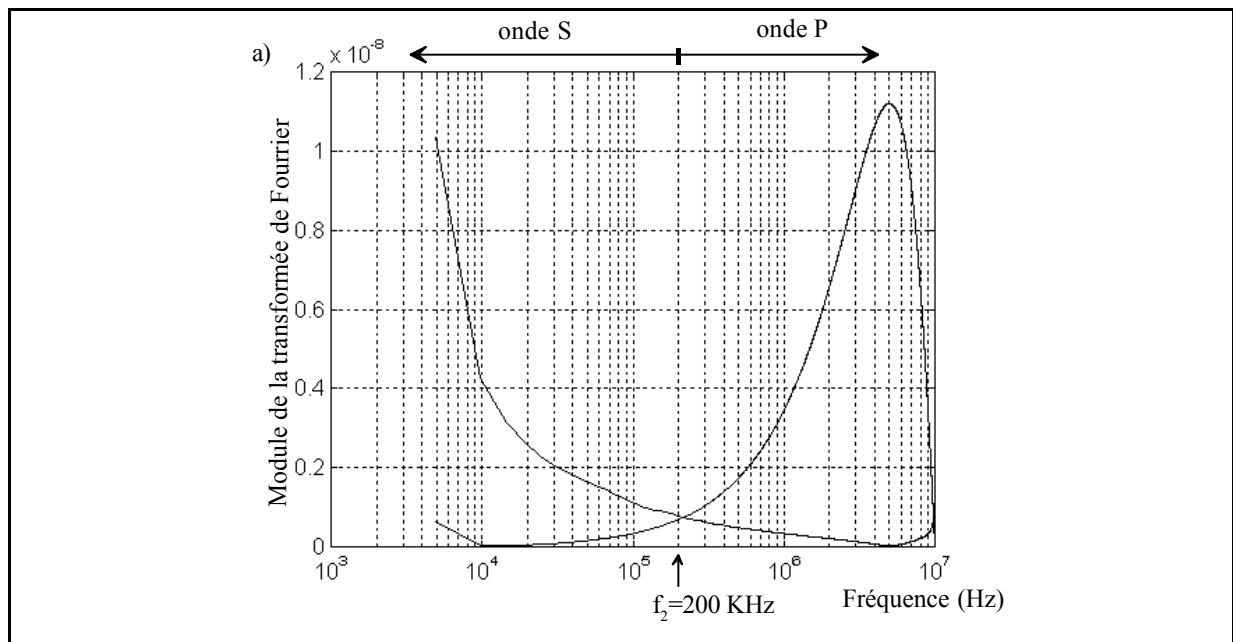
Alors les déplacements longitudinaux (selon l'axe z) générés par les vibrations monochromatiques d'une source ponctuelle sont calculés à partir de la convolution de (25) avec une sinusoïde (voir Annexe D).

$$s(t) = \frac{C_s}{2\pi \mu z^2 \gamma^2} \left\{ \underbrace{\omega t_p \cos \omega(t-t_p)}_{\text{onde } P} - \underbrace{2\gamma \sin \omega(t-t_s)}_{\text{onde } S} + \underbrace{\frac{2\gamma}{\omega t_s} [\cos \omega(t-t_s) - \cos \omega(t-t_p)]}_{\text{onde } P+S} \right\} \quad (26)$$

Trois conséquences apparaissent clairement dans la formule (26) :

- 1) Pour les hautes fréquences, le premier des termes de la somme, multiplié par la fréquence angulaire, domine (onde P). Par conséquent, la propagation des vibrations s'effectue dans le solide sous la forme d'une onde de compression.
- 2) A de très basses fréquences (jusqu'à la limite statique) le dernier terme de la somme, divisé par la fréquence angulaire, domine (onde P+S). Il représente à la fois une onde de compression et une onde de cisaillement.
- 3) Enfin, aux fréquences intermédiaires, c'est le terme du milieu qui domine (onde S) c'est à dire l'onde de cisaillement.

Les domaines fréquentiels dans lesquels chacun de ces termes domine peuvent être déduits de la fonction de Green exacte, Fig.9(b). Le calcul du module de la transformée de Fourier autour des temps d'arrivée de l'onde de compression (onde P) et de l'onde de cisaillement (onde S) ainsi qu'au temps intermédiaires (onde P+S) donne, en fonction de la fréquence, l'amplitude des déplacements de chacune de ces ondes. La comparaison de leur spectre, Fig.14, fournit les valeurs des fréquences pour lesquels ces ondes dominent.





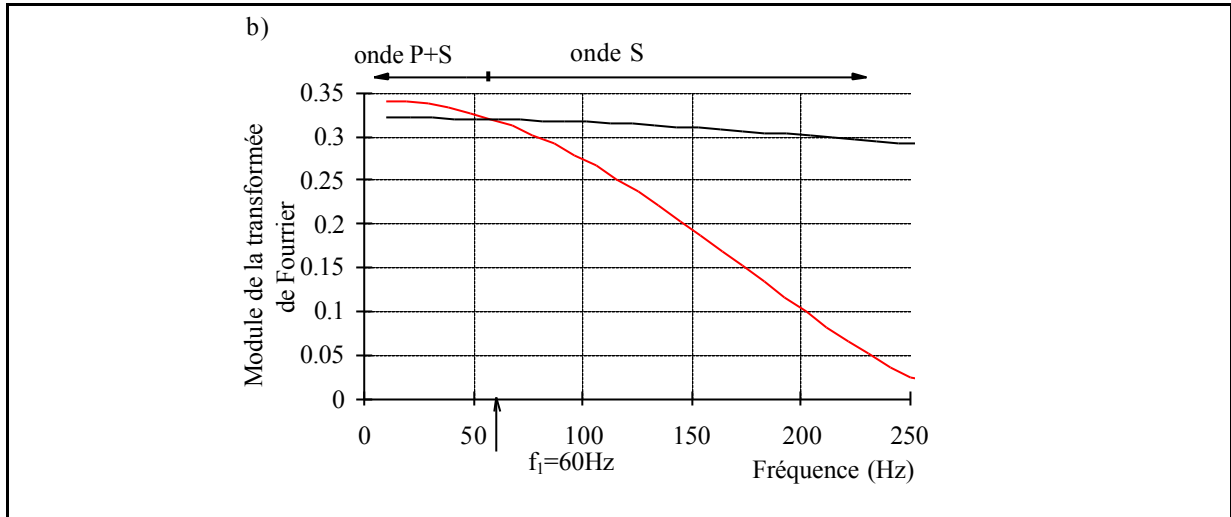


Fig.14 a) Module de la transformée de Fourier de l'onde de cisaillement (S) et de l'onde de compression (P). b) Module de la transformée de Fourier de l'onde de cisaillement (S) et du terme croisé (P+S). Ces calculs sont effectués à partir de la fonction de Green, Fig.9(b). Les domaines fréquentiels où ces ondes dominent s'étendent de part et d'autre de  $f_1=60$  Hz et  $f_2=200$  KHz.

Le domaine où le terme croisé (onde P+S) domine les déplacements s'étend de 0 à  $f_1=60$  Hz, Fig. 14(b). L'onde de cisaillement est prédominante à partir de  $f_1=60$  Hz jusqu'à  $f_2=200$  KHz. Au-dessus de cette fréquence, les déplacements du piston se propagent préférentiellement sous la forme d'une onde de compression.

La valeur de la fréquence frontière séparant les domaines de l'onde de compression et de l'onde de cisaillement (200 KHz) s'applique à notre modèle du solide parfaitement élastique. Or, si cette hypothèse est vraisemblable pour des fréquences basses, elle risque d'être prise à défaut pour des fréquences élevées; les effets de viscosité prendront le pas sur les effets d'élasticité. A terme, il sera nécessaire d'adapter les fonctions de Green à un milieu élastique avec de la viscosité en vue d'évaluer précisément la fréquence frontière  $f_2$ . Il est probable qu'à cause de l'atténuation supplémentaire due à la viscosité, l'onde de cisaillement soit négligeable pour une valeur nettement inférieure à  $f_2$ .

En 1951, Oestrecher a étudié l'impédance acoustique d'une sphère oscillante dans les milieux viscoélastiques [5]. En admettant l'approximation qui consiste à confondre une sphère oscillante dans un milieu infini et un piston vibrant sur la surface d'un milieu semi-infini, il a vérifié théoriquement et expérimentalement que l'impédance de l'onde de compression domine à partir de 10 KHz. Voici résumé figure (15) les résultats décrits dans ce paragraphe.

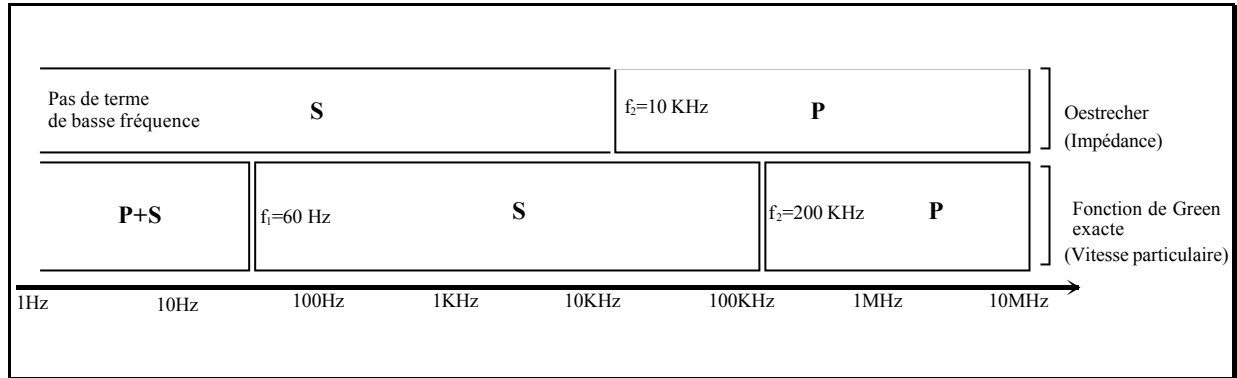


Fig.15 Domaines fréquentiels de domination des ondes de compression (P) et des ondes de cisaillement (S) dans les tissus biologiques. Résultats obtenus par le calcul d'impédance [5] ou le calcul des fonctions de Green exacte sur l'axe de la source à 2 cm de profondeur (vitesse particulière).

Les domaines fréquentiels de domination des différents types d'ondes sont établis à partir du calcul de la vitesse ou de l'impédance. D'un point de vue énergétique, les valeurs des fréquences frontières sont encore différentes. En effet, l'énergie est définie comme la valeur moyenne du carré du produit de l'impédance par la vitesse particulière. Bien qu'elle ne soit pas un bilan énergétique d'un piston vibrant à la surface d'un solide, la figure 15 permet de recouper les résultats que donnent les études de l'impédance et de la vitesse particulière. Les conclusions qualitatives suivantes en découlent : à une profondeur donnée sur l'axe de symétrie d'un piston ponctuel, quasiment toute l'énergie libérée par des vibrations de haute fréquence se propage sous forme d'une onde de compression. Par contre, les vibrations de basse fréquence favorisent la propagation d'énergie sous forme d'une onde de cisaillement.

### Champ proche-champ intermédiaire-champ lointain

L'équation (26) donne les déplacements longitudinaux sur l'axe d'une source ponctuelle vibrant monochromatiquement. Il est possible d'exprimer les temps d'arrivées  $t_P$  et  $t_S$  des ondes de compression et de cisaillement en fonction de leur vitesse  $C_P$ ,  $C_S$  et de la profondeur  $z$  :  $t_P = \frac{z}{C_P}$ ,

$t_S = \frac{z}{C_S}$ . L'équation (27) donne alors la loi de variation de l'amplitude de chacun des termes en

fonction de la profondeur.

$$s(t) = \frac{C_P}{2\pi\mu\gamma^2} \left\{ \underbrace{\frac{\omega}{z C_P} \cos\omega(t-t_P)}_{\text{onde } P} - \underbrace{\frac{2\gamma}{z^2} \sin\omega(t-t_S)}_{\text{onde } S} + \underbrace{\frac{2\gamma C_S}{z^3 \omega} [\cos\omega(t-t_S) - \cos\omega(t-t_P)]}_{\text{ondes } P+S} \right\} \quad (27)$$

L'interprétation de cette équation est intéressante : elle stipule que la décroissance du premier terme (onde P) s'effectue en  $1/z$  (loi de décroissance d'une onde sphérique), qu'en revanche le second terme (onde S) décroît en  $1/z^2$ , et qu'enfin le terme croisé (ondes P+S) suit une loi en  $1/z^3$ .

En sismologie, Aki et Richards [7] ont étudié la fonction de Green d'une source de force ponctuelle selon une direction dans un solide homogène et infini. Dans cette configuration simple et très générale, le champ de déplacement s'exprime comme la somme de trois termes distincts. L'amplitude relative de chacun de ces termes dépend de la distance source-récepteur  $r$ . Le *champ proche* désigne le terme  $\vec{u}^{CP}$  qui domine lorsque  $r$  tend vers 0. Il obéit à une loi de décroissance en  $1/r^3$ . Ce terme n'est ni purement irrotationnel ni purement solénoïdal (divergence nulle). Il résulte du déplacement d'une onde de compression et d'une onde de cisaillement. Ces déplacements ont des composantes longitudinale et transversale. Le *champ lointain* désigne quant à lui les termes qui dominent lorsque  $r$  tend vers l'infini : un terme de cisaillement  $\vec{u}^S$  et un terme de compression  $\vec{u}^P$ . Ils suivent une loi de décroissance en  $1/r$ . Pour le terme de compression, les déplacements particuliers sont parallèles à la direction de propagation; il s'agit d'une *onde longitudinale*. Le terme de cisaillement est une *onde transverse* car les déplacements particuliers sont perpendiculaires à sa direction de propagation. Onde longitudinale et onde transverse sont donc des cas particuliers respectivement d'onde de compression et d'onde de cisaillement.

Dans le cas plus réaliste en sismologie où la source est un couple de forces (plutôt qu'une force), Aki et Richards sont arrivés au résultat suivant : le champ de déplacement contient cinq termes distincts au lieu de trois. Le terme de champ proche et les deux termes de champ lointain apparaissent de nouveau. Les deux autres termes ont une loi de décroissance en  $1/r^2$ . L'un d'eux est un terme de compression et l'autre un terme de cisaillement. Puisque ces termes ne dominent ni en champ proche, ni en champ lointain, ils ont été baptisés termes de *champ intermédiaire*. Comme pour le champ proche, ces déplacements peuvent avoir des composantes à la fois longitudinale et

transversale. En revanche, comme pour le champ lointain, le terme de compression et le terme de cisaillement sont parfaitement séparés.

Les propriétés du champ lointain, du champ intermédiaire et du champ proche, peuvent être résumées de la façon suivante<sup>ii</sup> :

-En champ lointain, les déplacements s'atténuent en  $1/r$  et sont polarisés transversalement pour les ondes de cisaillement (onde transverse) et longitudinalement pour les ondes de compression (onde longitudinale).

-En champ intermédiaire, les déplacements s'atténuent en  $1/r^2$ . Les ondes de compression et de cisaillement peuvent induire des déplacements de composante à la fois longitudinale et transversale.

-En champ proche, les déplacements ne sont ni purement irrotationnels ni purement solénoïdal. Ils sont causés à la fois par une onde de cisaillement et une onde de compression. La composante des déplacements comme dans le cas du champ intermédiaire peut être à la fois longitudinale et transversale.

Les propriétés du champ lointain, du champ intermédiaire et du champ proche, telles qu'elles sont définies dans le problème général d'une source de force ponctuelle ou d'un couple de force au sein d'un solide homogène et infini, révèlent la nature des déplacements donnés par l'équation (27). En effet, les déplacements longitudinaux sur l'axe de la source font apparaître un terme en  $1/z$ . (sur l'axe la distance source-récepteur est équivalent à la profondeur;  $r \equiv z$ ). Il s'agit donc d'un terme de champ lointain. De plus, c'est un terme de compression : une onde longitudinale. Le terme suivant s'atténue en  $1/z^2$ . C'est un terme de cisaillement mais il ne s'agit pas d'une onde transverse car la composante des déplacements est longitudinale. C'est une onde de cisaillement en champ intermédiaire. Elle a par conséquent la double propriété de se propager à la même vitesse qu'une onde transverse et d'avoir une composante de déplacement longitudinale (selon l'axe de la source). Enfin, le dernier terme contient les déplacements indissociables d'une onde de cisaillement et d'une onde de compression. De plus, à cause d'une décroissance en  $1/z^3$ , il domine lorsque  $z$  tend vers zéro : il s'agit d'un terme de champ proche.

---

<sup>ii</sup> Lorsqu'une onde plane monochromatique éclaire une ouverture, on distingue une région de champ proche, la zone de Fresnel, et une région de champ lointain, la zone de Fraunhofer. Cette définition du champ proche, dont les effets sont observés en optique et en acoustique (zone de Fresnel), est indépendante de celle que donne Aki et Richards. Le terme de champ proche est employé pour désigner deux phénomènes physiques distincts.

Deux enseignements sont tirés de cette analyse : premièrement, sur l'axe, loin du piston (en champ lointain), seule l'onde longitudinale se propage. Deuxièmement, près du piston, l'onde de cisaillement domine à travers les termes de champ intermédiaire et de champ proche. Elle ne peut donc pas être négligée, même à des fréquences élevées, dans un bilan énergétique. Elle est sans doute responsable des hautes températures qui règnent au voisinage immédiat des transducteurs ultrasonores et sur les bords où il existe des conversions d'onde de compression en onde de cisaillement.

Bien qu'il existe de nombreux points communs entre le problème d'une source ponctuelle dans un milieu infini et celui d'une source ponctuelle à la surface d'un milieu semi-infini, ils ne sont pas rigoureusement identiques. Si le champ des déplacements calculé par Aki et Richards est exact, les déplacements donnés par la formule (27) sont approchés. Par conséquent, l'analyse proposée dans les paragraphes précédents repose sur une analogie entre les termes de la fonction de Green approchée et les définitions rigoureuses de champ lointain, champ intermédiaire et champ proche.

En résumé, l'étude de la fonction de Green simplifiée à une profondeur donnée sur l'axe d'une force ponctuelle permet d'expliquer la domination d'une onde de compression à de hautes fréquences et d'une onde de cisaillement à de basses fréquences. Pour des fréquences très basses (jusqu'à la limite du statique), les déplacements sont ceux à la fois d'une onde de compression et d'une onde de cisaillement. Le corollaire est qu'à une fréquence fixée, en champ lointain il n'existe qu'une onde longitudinale, le champ intermédiaire est dominé par une onde de cisaillement et le champ proche par un terme de compression et de cisaillement. L'apport essentiel de cette analyse est d'avoir défini clairement la différence entre onde transverse, onde de cisaillement et entre onde longitudinale et onde de compression. Cette confusion était à l'origine d'une incompréhension face à l'existence d'une composante longitudinale à une onde de cisaillement.

Enfin, la fonction de Green simplifiée prédit également un effet d'interférence entre onde de compression et onde de cisaillement.

### **Interférences entre onde de compression et onde de cisaillement**

Dans la gamme de fréquence de nos expériences, entre 50 et 250 Hz, même si l'onde de cisaillement domine, on peut observer les effets du terme d'interférence entre onde de compression

et de cisaillement sur l'amplitude des déplacements. En effet, des minima locaux sont observés lorsque les termes " $\cos \omega(t-t_L)$ " et " $\cos \omega(t-t_T)$ " sont en phase c'est à dire quand :

$$\omega(t-t_S) = \omega(t-t_P) + 2n\pi \quad (28)$$

ce qui conduit, en négligeant  $t_P = \frac{z_n}{\lambda_P}$  devant  $t_S = \frac{z_n}{\lambda_S}$ , à :

$$z_n \approx n \lambda_S \quad (29)$$

$\lambda_S$  est la longueur d'onde de cisaillement,  $n$  est un entier positif et  $z_n$  représente les profondeurs pour lesquelles l'amplitude est minimum. L'équation (29) prévoit, à cause des effets d'interférences entre onde de compression et onde de cisaillement, l'apparition de minima locaux espacés d'une longueur d'onde de cisaillement.

Le montage expérimental utilisé ici est présenté au chapitre II, Fig.1. Le rayon du piston circulaire utilisé est de 10 mm et la fréquence des excitations mécaniques est de 250 Hz. Le gel de dimensions 10x10x85 cm est composé de 3% d'agar et de 3% de gélatine. L'effet d'interférence entre onde de compression (P) et onde de cisaillement (S) est parfaitement visible sur le sismogramme, Fig. 16. L'excitation du piston survient au temps  $t_0=20$  ms. Ce piston se situe à 85 mm de profondeur et le transducteur est à l'origine. Deux segments de droite découpent le sismogramme en trois zones : la première (en partant de la gauche) correspond aux déplacements mesurés dans un échantillon immobile, la seconde contient les déplacements de l'onde de compression, et la troisième ceux des déplacements dus à l'interférence entre ondes de compression et onde de cisaillement. Les déplacements minimum pointés par des flèches et qui apparaissent régulièrement espacés d'une longueur d'onde de cisaillement, correspondent aux profondeurs pour lesquelles les phases des deux ondes sont en opposition.

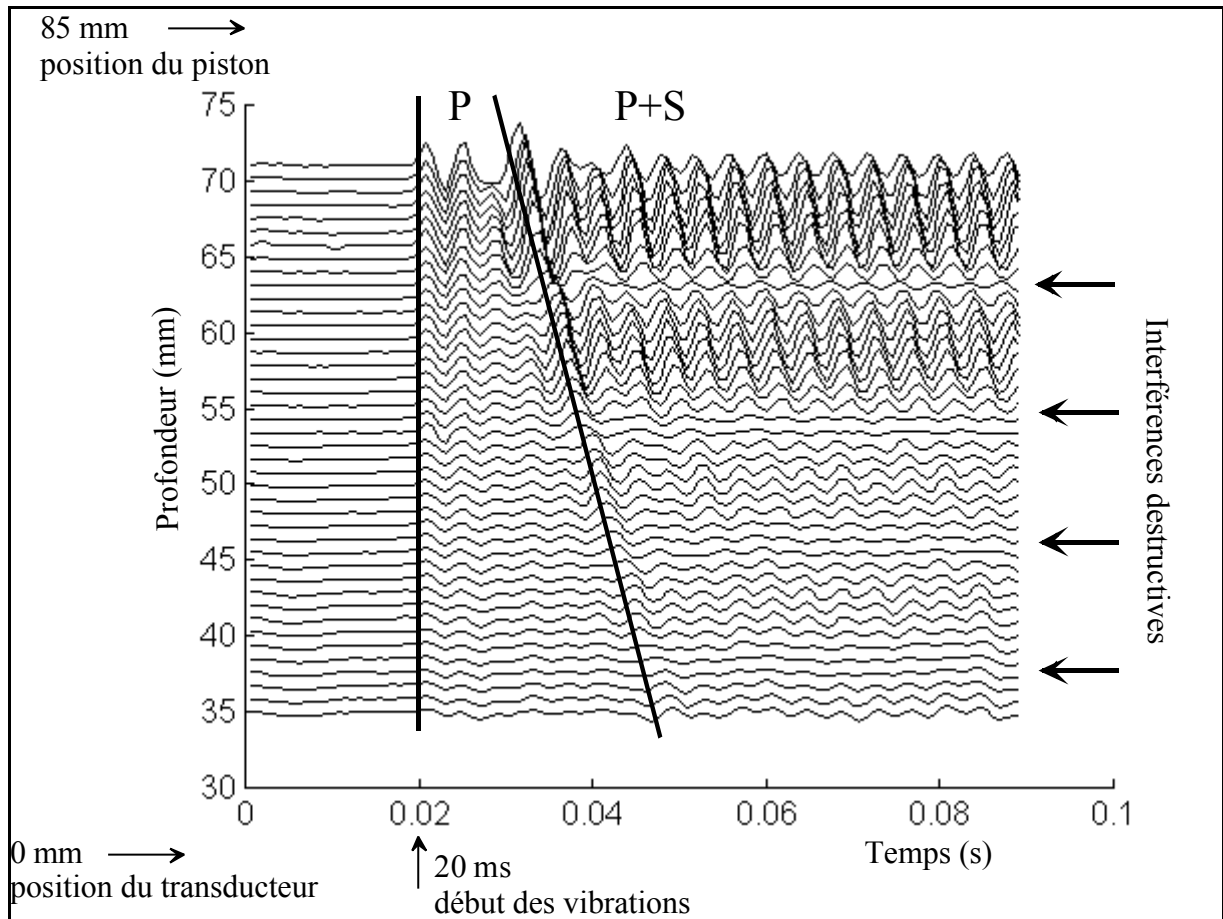


Fig.16 : Visualisation sismique des déplacements dans un gel mis en mouvement depuis la surface par des vibrations sinusoïdales de 250 Hz au temps  $t_0=20$  ms au moyen d'un piston de rayon 1 cm. Les profondeurs d'interférences destructives sont pointées par des flèches.

L'amplitude, Fig. 17, est calculée à partir du sismogramme, Fig.16, et d'un second sismogramme du même type (qui n'apparaît pas sur ce manuscrit) contenant les déplacements aux profondeurs comprises entre 0 et 35 mm. Par souci de clarté, l'échelle des profondeurs est inversée sur la courbe d'amplitude : l'origine des amplitudes correspond ici à la position du piston. On retrouve bien les maxima et les minima d'amplitude en fonction de la profondeur sur l'axe du piston. Dans ce gel, la vitesse de phase des ondes de cisaillement est de 3 m/s par conséquent, à 250 Hz, la longueur d'onde est de 1 cm. C'est bien la distance qui sépare deux minima consécutifs sur la Fig.17.

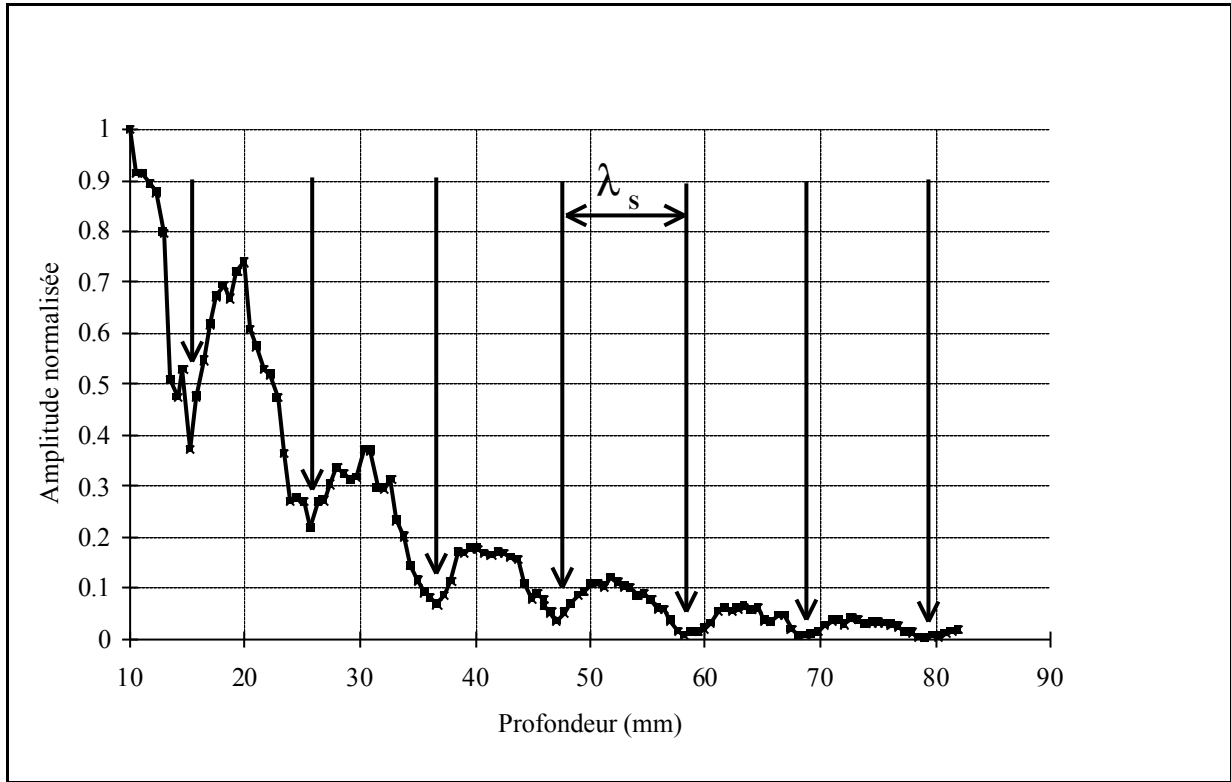


Fig.17 : Effet d'interférence entre onde P et S sur l'amplitude le long de l'axe d'un piston circulaire de rayon 1 cm.

En ce qui concerne la phase de l'onde de cisaillement, elle est aussi modifiée par la présence de l'onde de compression, Fig.18. Toutefois la vitesse peut être évaluée avec une précision satisfaisante :  $2.65 \pm 0.18$  m/s. Il semble que l'influence de l'onde de compression de basse fréquence soit d'autant plus importante que la taille du piston circulaire est grande. Dans le cas d'un point source avec des conditions libres aux frontières (conditions de Dirichlet), l'onde de cisaillement domine et sur la phase on devine difficilement les effets d'interférences, Fig.2 (paragrapheIII-3).



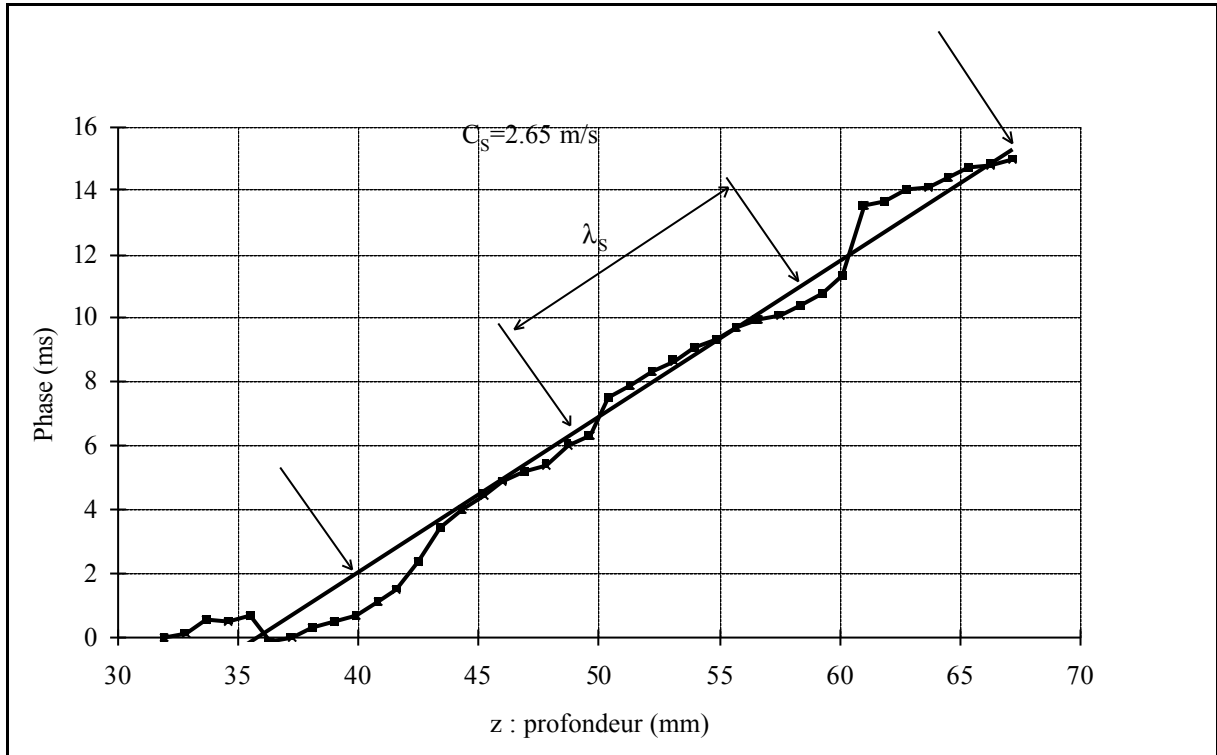


Fig.18 : Influence de l'onde de compression sur la phase de l'onde de cisaillement générée par une source de rayon  $a=1 \text{ cm}$ . La phase est calculée à partir des déplacements de la zone « P+S » du sismogramme Fig.16.

On pourra retenir que les effets d'interférence entre l'onde de compression et l'onde de cisaillement :

- sont bien moins visibles sur la phase que sur l'amplitude,
- ils sont d'autant plus prononcés que la taille du piston est grande. Cette affirmation repose sur l'observation expérimentale.
- Ces effets peuvent être utilisés pour mesurer la vitesse de phase de l'onde de cisaillement puisque les extrema apparaissent espacés d'une longueur d'onde.

### Résumé et conséquences

Dans l'étude des phénomènes qui perturbent les mesures de vitesse et d'atténuation des ondes de cisaillement sur l'axe d'un piston, trois sources d'erreurs ont été mises en évidence. D'abord les ondes réfléchies sur les parois de l'échantillon peuvent modifier fortement voire empêcher les mesures de vitesse et d'atténuation. Ensuite, à cause de la proximité de la source de vibrations de basses fréquences, l'hypothèse d'onde plane n'est plus justifiée. L'influence du champ

proche sur la vitesse de phase lorsque la fréquence et la taille du piston changent a été montré. Enfin la troisième source d'erreur dont il a été question dans cette section est la présence et l'influence de l'onde de compression de basse fréquence. En effet le calcul des fonctions de Green dans le cas d'une force ponctuelle appliquée à un solide élastique semi-infini a montré l'existence à l'épicentre d'une composante longitudinale de l'onde de cisaillement et de l'onde de compression. Ces composantes peuvent interférer constructivement ou destructivement et faire apparaître des extrema sur l'amplitude et des points d'inflexions sur la phase des déplacements. Le prochain paragraphe décrit une méthode qui permet d'éviter ces trois biais, d'évaluer précisément la vitesse et l'atténuation de l'onde de cisaillement pour finalement mesurer quantitativement l'élasticité de cisaillement et la viscosité de cisaillement.

## 5- L'ELASTOGRAPHIE IMPULSIONNELLE

### Mouvement de tissus induit par un « coup » acoustique.

Le principe de base de l'expérience présentée ici est de remplacer l'excitation sinusoïdale du piston par une impulsion de 2 ms. A cause de l'inertie du vibreur, la forme temporelle réelle des déplacements du piston est une sinusoïde amortie. Le montage expérimental demeure celui qui est décrit au chapitre II, Fig.1. Le rayon du piston est de 0.5 cm, dimension inférieure à la demi-longueur d'onde de cisaillement.

Les déplacements expérimentaux induits par une excitation quasi-impulsionnelle (sinusoïde amortie de 150 Hz) sont représentés sur la Fig.19. A environ 25 ms, l'impulsion acoustique est générée par une source ponctuelle depuis la surface située à 70 mm de profondeur. Au temps  $T=25$  ms, une première onde crée des déplacements simultanés sur toute la profondeur : il s'agit de l'onde de compression (P). Sa vitesse de propagation est grande devant l'échelle temporelle du sismogramme (1500 m/s), c'est pourquoi, en apparence, elle se propage instantanément. Une seconde onde se détache au-delà de 25 ms. Elle se propage du haut vers le bas du gel à une vitesse de  $2.7 \text{ ms}^{-1}$  : il s'agit de l'onde de cisaillement (S).

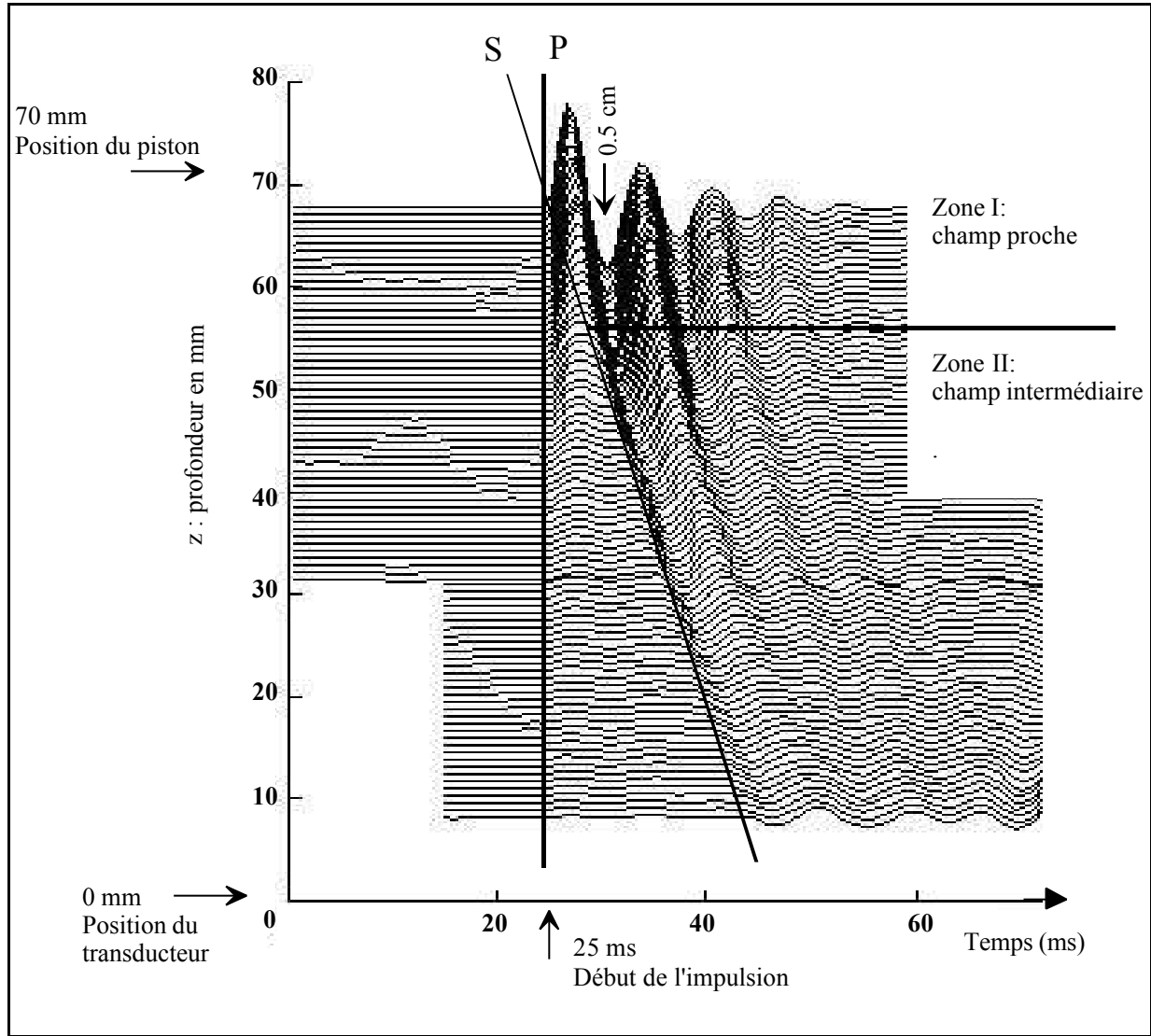


Fig.19 Déplacements expérimentaux obtenus dans un gel d'agar-gélatine sur l'axe d'un piston de rayon 0.5 cm. Deux sismogrammes ont été nécessaires à la réalisation de cette figure. Les déplacements n'ont pas été synchronisés sur le début de l'impulsion ce qui explique le décalage entre les sismogrammes. On distingue deux parties : la zone I contient les déplacements des ondes S et P (champ proche) et la zone II, les déplacements de l'onde S (champ intermédiaire).

Dans l'exemple du sismogramme, Fig.19, la longueur d'onde de cisaillement est de 3.3 cm. La zone d'influence du terme de champ proche s'étend donc jusqu'à 0.5 cm du piston (zone I). En effet, la comparaison des coefficients  $\frac{2\gamma}{z^2}$  (onde S) et  $\frac{2\gamma C_P}{z^3 \omega}$  (onde P+S) de l'équation 27, montre que le terme de champ proche (CP) domine jusqu'à une profondeur  $z_{CP}$  définie par :

$$z_{CP} = \frac{\lambda_s}{2\pi} \quad (30)$$

Au-delà, zone II, les déplacements de l'onde de compression et de l'onde de cisaillement sont clairement identifiables.

A présent, il est possible de ne sélectionner que les déplacements causés par la propagation du front d'onde de cisaillement. Les interférences avec les ondes réfléchies sur les parois et avec l'onde de compression sont désormais évitées. De plus, en travaillant avec une source de petite dimension (0.5 cm) à une distance supérieure à  $z_{CP}$  (Eq.30), les problèmes de champ proche sont écartés.

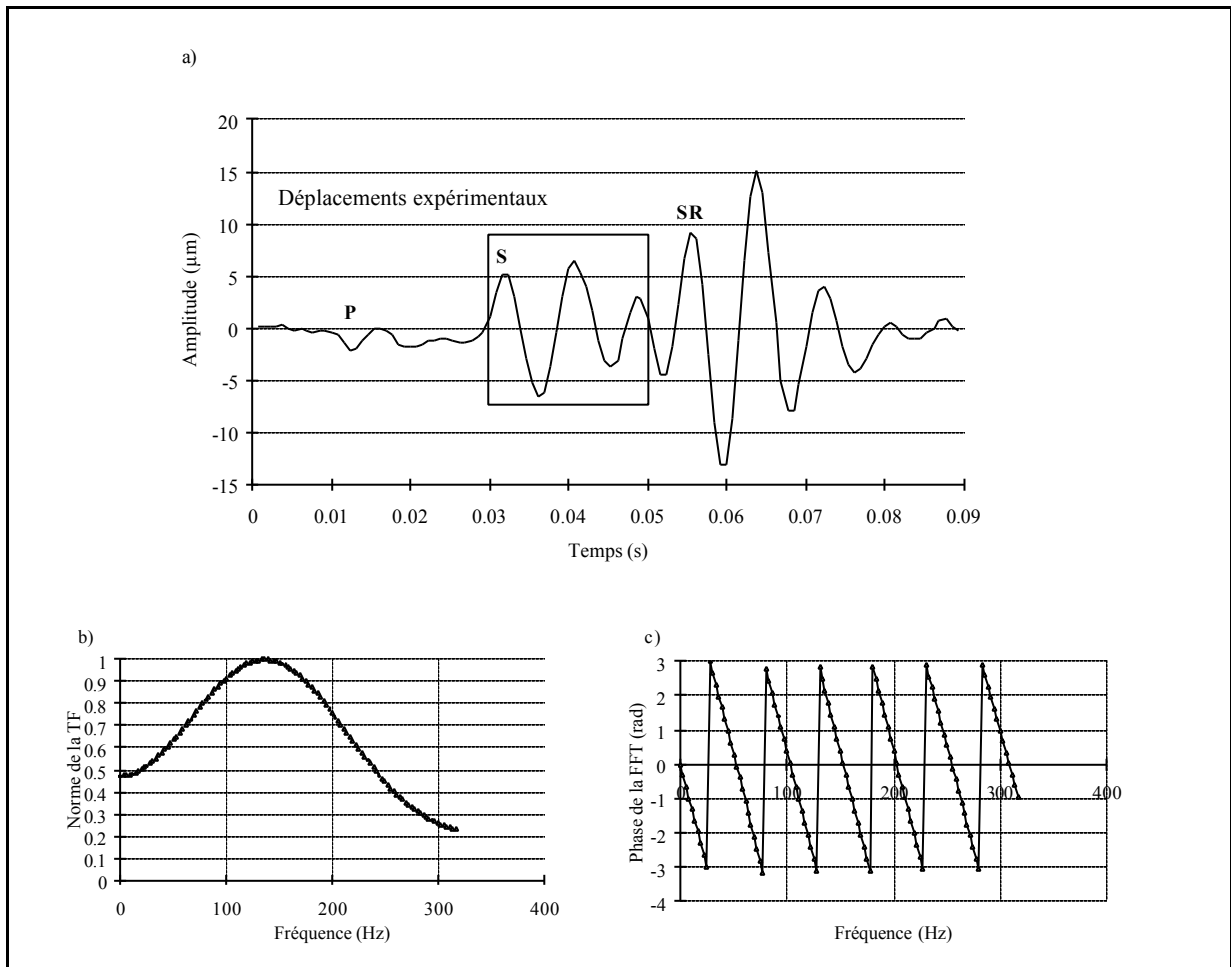


Fig.20 a) Déplacements en fonction du temps d'un volume élémentaire situé à 5 cm du piston, Fig.19. b) Le module de la TF des déplacements de l'onde S, c) sa phase. Ce calcul effectué à toutes les profondeurs permet d'extraire la vitesse de phase et l'atténuation.

Les courbes de phase et d'amplitude sont obtenues par analyse de Fourier. La transformée de Fourier (TF) des déplacements en fonction du temps de l'onde de cisaillement, Fig.20(a), est calculée à une profondeur. Le module, Fig.20(b), et la phase, Fig.20(c), de cette TF permettent alors de calculer pour plusieurs fréquences l'amplitude et la phase de l'onde de cisaillement à cette profondeur. En itérant ce calcul à toutes les profondeurs à la fréquence du maximum du module de la TF (130 Hz), Fig.20(b), on obtient la phase et l'amplitude en fonction de la profondeur, Fig.21. L'origine des profondeurs est prise sur la face avant du piston.

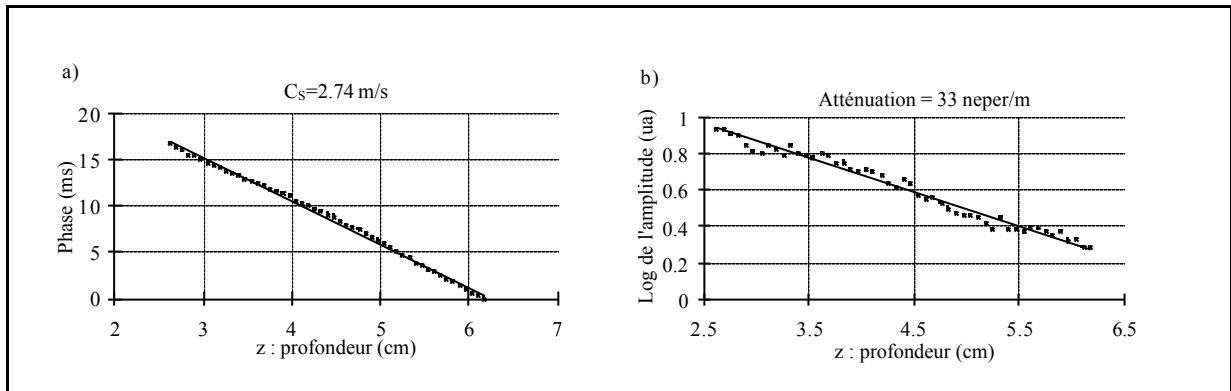


Fig.21 Phase (a) et logarithme de l'amplitude (b) d'une onde de cisaillement de 130 Hz calculés par l'analyse de Fourier d'un des deux sismogrammes, Fig.19. L'origine des profondeurs (axe  $z$ ) correspond à la position du piston.

Alors la vitesse  $C_s$  et l'atténuation  $\alpha_s$  de l'onde de cisaillement sont calculées respectivement à partir de la phase, Fig.21(a), et de l'amplitude, Fig.21(b), avec une bonne précision :  $C_s = 2.74 \pm 0.03$  m/s et  $\alpha_s = 33 \pm 4$  neper/m. L'incertitude sur ces mesures est calculée à partir de l'écart type entre les points expérimentaux et les droites théoriques ajustées par une méthode des moindres carrés.

## 6- APPLICATION DE L'ELASTOGRAPHIE IMPULSIONNELLE A UN MUSCLE ET A UN PRODUIT LAITIER

Dans ce paragraphe, l'élastographie impulsionnelle est utilisée pour mesurer la vitesse et l'atténuation des ondes de cisaillements dans un muscle de boeuf (*semi-membranosus*) et dans un

produit laitier (yaourt brassé). En choisissant le corps de Voigt comme modèle rhéologique de ces milieux, on peut déduire l'élasticité de cisaillement et la viscosité de cisaillement.

Sur un muscle de boeuf (*semi-membranosus*) de 60 mm d'épaisseur, un piston de 0,5 cm de rayon génère des déplacements d'environ 100  $\mu\text{m}$  d'amplitude. La forme temporelle de ces déplacements que l'on déclenche au temps  $t = 20$  ms est une arche de sinusoïde de 120 Hz. Les fibres musculaires sont disposées perpendiculairement au faisceau ultrasonore. L'échantillon est en équilibre thermique avec la pièce (20°C). Les mouvements de tissus sont détectés au moyen de la sonde ultrasonore de 3 MHz. La zone insonifiée s'étend de 1,4 à 5,1 cm de profondeur sur l'axe du piston situé à 60 mm. Les déplacements, Fig.22, font apparaître une onde de compression (P), une onde de cisaillement (S) et une onde de cisaillement retour, réfléchi par la surface en contact avec le transducteur ultrasonore.

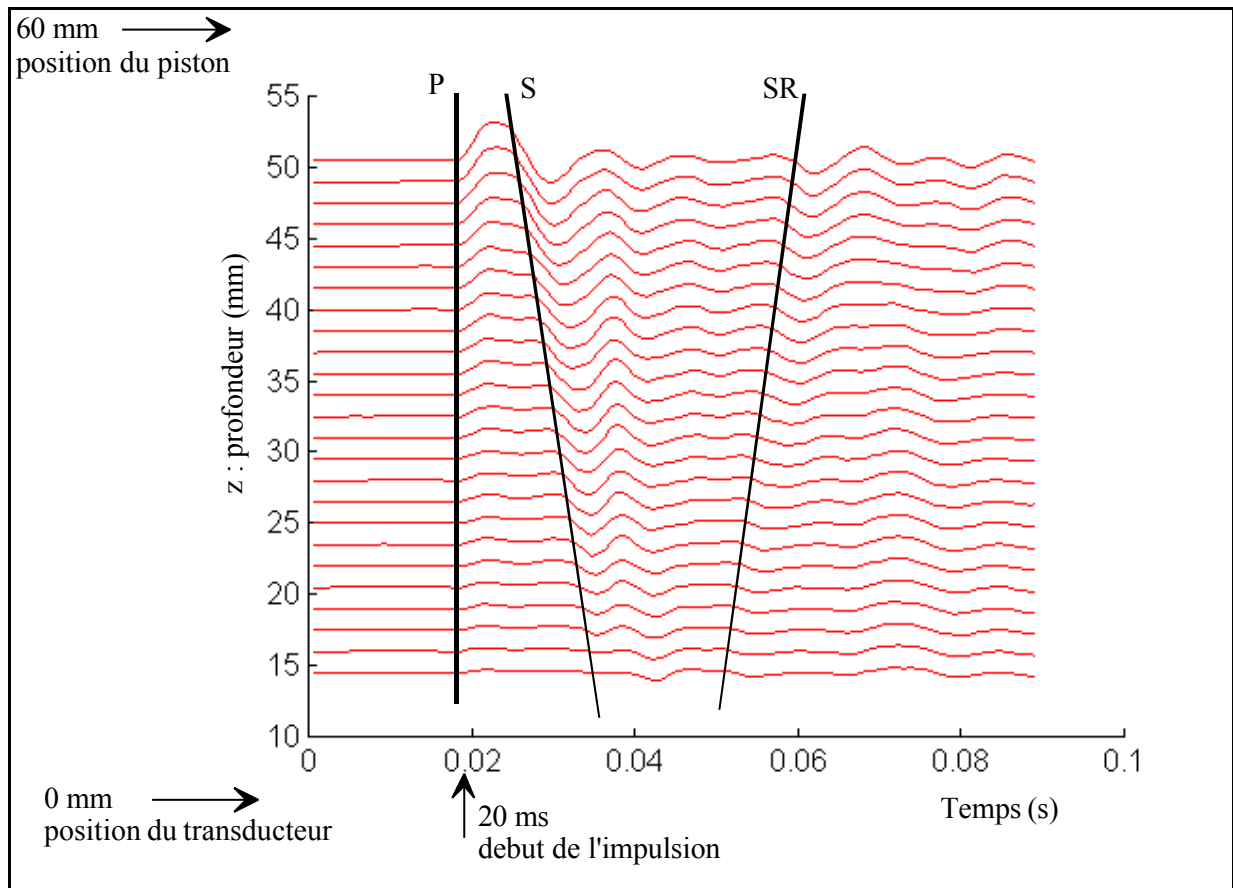


Fig.22 : Sismogramme obtenu dans un muscle (*semi-membranosus*) sur l'axe d'un piston de 0,5 cm de rayon. L'excitation de la source est une arche de sinusoïde de 120 Hz. On distingue les déplacements d'une onde de compression (P), d'une onde de cisaillement (S) et d'une onde de cisaillement retour (SR).

La vitesse et l'atténuation de l'onde de cisaillement dans le muscle sont calculées à partir de la phase et de l'amplitude expérimentale, Fig.23(a) et (b). Ces courbes sont obtenues par analyse de Fourier des déplacements de l'onde de cisaillement à la fréquence de 120 Hz. L'erreur sur les mesures de vitesse et d'atténuation est déduite de l'écart type entre les valeurs de la phase expérimentale et la droite théorique ajustée par une méthode des moindres carrés. Les valeurs calculées sont:  $C_s = 5,29 \pm 0,14 \text{ m.s}^{-1}$  pour la vitesse et  $\alpha_s = 50 \pm 4 \text{ m}^{-1}$  pour l'atténuation.

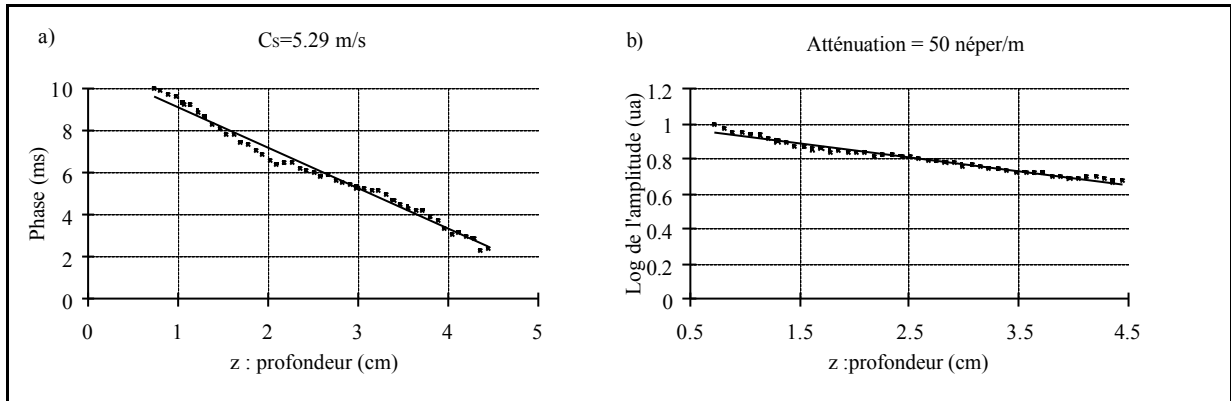


Fig.23 : Phase (a) et logarithme de l'amplitude (b) de l'onde de cisaillement calculée avec la méthode d'élastographie impulsionnelle dans un muscle. La fréquence de l'onde est de 120 Hz.

Une expérience d'élastographie impulsionnelle dans un produit laitier est présentée Fig.24. Il s'agit d'un yaourt brassé. A cause de la texture liquide du produit, l'expérience est menée dans un récipient. Le principe du montage expérimental est encore celui de la figure 1 du chapitre II. Dans les muscles ou dans les fantômes d'agar-gélatine, toutes les surfaces sont libres sauf celle qui est en contact avec le support. Pour le produit laitier, seule la surface du côté du piston est libre. Les parois du récipient constituent les frontières des autres faces. Une ouverture à la taille du transducteur ultrasonore est pratiquée dans le fond du récipient. Le diamètre du récipient cylindrique est de 11 cm. La profondeur de produit laitier est de 60 mm. Le piston de 0,5 cm de rayon génère des déplacements d'environ  $200 \mu\text{m}$  d'amplitude au temps  $t=10 \text{ ms}$ . La fréquence centrale de ces déplacements (une arche de sinusoïde) est de 30 Hz. Les mouvements dans le produit sont détectés au moyen de la sonde ultrasonore de 3 MHz. La zone insonifiée s'étend de 1,2 à 5 cm de profondeur sur l'axe du piston situé à 60 mm. Les déplacements, Fig.24, font apparaître l'onde de compression (P) et l'onde de cisaillement (S).

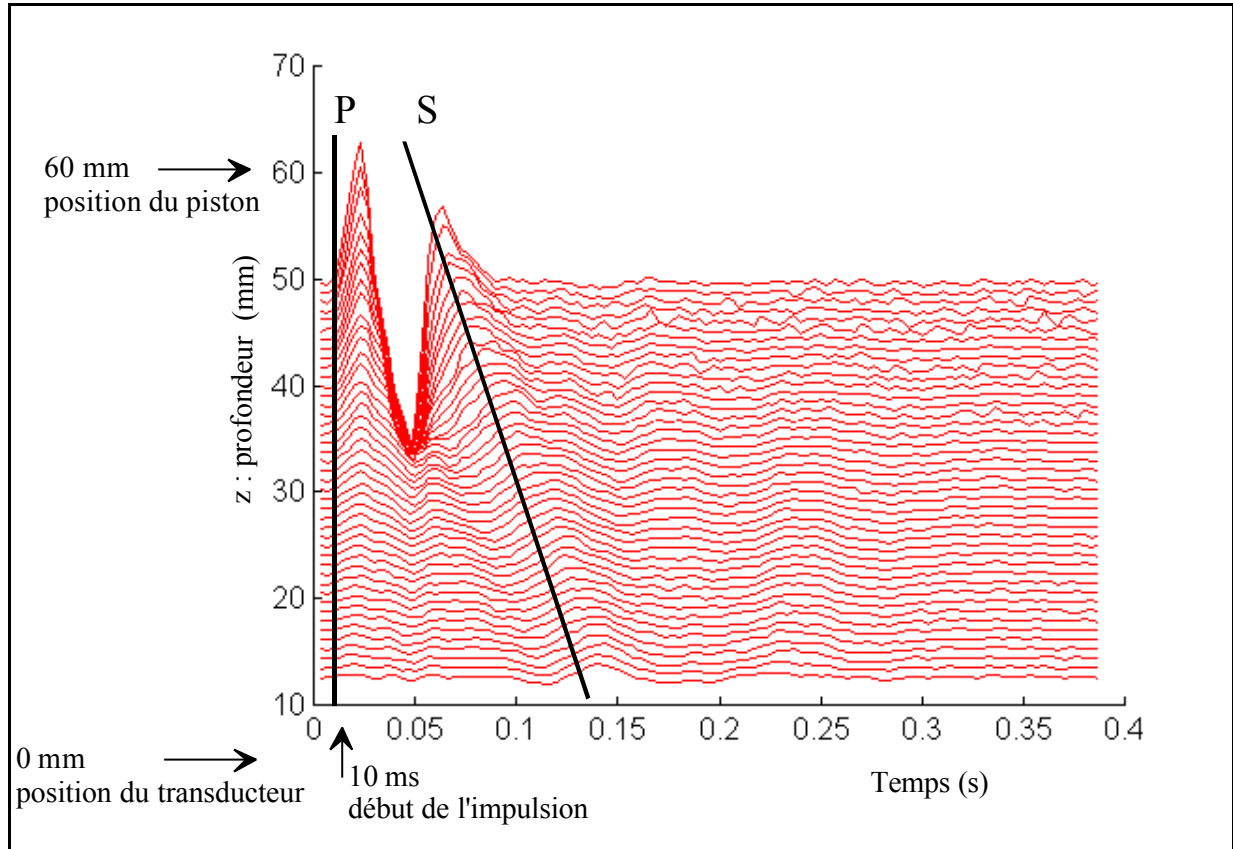


Fig.24 : Sismogramme obtenu dans un produit laitier (yaourt brassé) sur l'axe d'un piston de 0,5 cm. L'excitation de la source est une arche de sinusoïde de 30 Hz. On distingue les déplacements d'une onde de compression (P) et d'une onde de cisaillement (S).

La vitesse et l'atténuation de l'onde de cisaillement dans le produit laitier sont calculées à partir de la phase et de l'amplitude expérimentale, Fig.25(a) et (b). Ces courbes sont obtenues par analyse de Fourier des déplacements de l'onde de cisaillement à la fréquence de 15 Hz. Les valeurs calculées sont:  $C_S = 0,51 \pm 0,01 \text{ ms}^{-1}$  pour la vitesse et  $\alpha_S = 37 \pm 3 \text{ m}^{-1}$  pour l'atténuation.

La diffusion des ultrasons est due aux grains d'agar dans les fantômes et aux fibres musculaires ou aux tissus conjonctifs dans la viande. Dans les produits laitiers, ce sont les micelles de caséine qui jouent le rôle de diffuseurs. Les macromolécules de caséines se groupent en micelles de 100 à 200 nm. Lors de la fabrication d'un yaourt, ces micelles s'enchevêtrent et forment un réseau très lâche qui donnent au produit sa consistance plus ou moins liquide. Pour les ultrasons, ces structures dont la dimension dépassent la dizaine de micromètres génèrent des échos : le milieu devient diffuseur. Pour les ondes de cisaillement, ces enchevêtrements donnent naissance à des forces de rappel nécessaires à la propagation de l'onde de cisaillement.



La valeur de cette élasticité de cisaillement est faible. C'est pour cette raison que la vitesse de l'onde de cisaillement ( $0,51 \text{ m.s}^{-1}$ ) est beaucoup plus faible que dans les fantômes d'agar gélatine ( $2,74 \text{ m.s}^{-1}$ ) ou que dans les muscles ( $5,29 \text{ m.s}^{-1}$ ). C'est aussi pour cette raison que l'onde de cisaillement ne se détecte facilement que pour des valeurs très basses de la fréquence de l'impulsion acoustique. En effet, à de très basses fréquences, les effets de la viscosité (proportionnelle à la vitesse particulière donc à la fréquence) sont négligeables par rapport à ceux de l'élasticité. Or, c'est le rapport de l'élasticité sur la viscosité qui détermine la propagation ou non d'une onde. Dans le cas des fantômes d'agar-gélatine ou dans les muscles, l'élasticité domine. Par conséquent, il est possible d'observer l'onde de cisaillement jusqu'à 500 Hz (limite de la fréquence de vibration qu'autorise notre électronique de détection). En revanche dans les produit laitier, ce rapport ne permet de détecter l'onde de cisaillement qu'en dessous de 50 Hz (valeur maximum de la fréquence d'une onde de cisaillement observée expérimentalement). Au-dessus, l'atténuation due à la viscosité ne permet pas aux ondes de se propager suffisamment loin de la source.

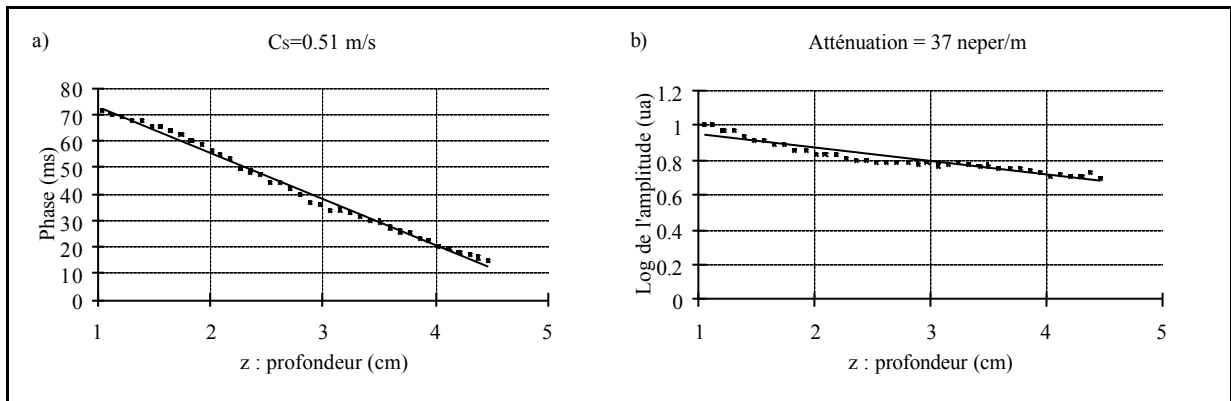


Fig.25: Phase (a) et logarithme de l'amplitude (b) de l'onde de cisaillement calculée avec la méthode d'élastographie impulsionnelle dans un produit laitier. La vitesse de phase et l'atténuation sont calculées pour une fréquence de 15 Hz.

Le choix du modèle rhéologique des milieux biologiques comme les tissus mous se porte dans la littérature sur le *solide de Voigt*. Dans ce cas simple, vitesse et atténuation sont des fonctions de l'élasticité de cisaillement  $\mu_1$  et de la viscosité de cisaillement  $\mu_2$ , Eq.(16) et (17) de ce chapitre. Ces équations sont inversibles. Les calculs ainsi que les expressions de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en fonction de la vitesse et de l'atténuation sont contenus dans l'annexe E.

Pour un muscle, un produit laitier et un fantôme d'agar-gélatine, les valeurs de vitesse, d'atténuation, d'élasticité de cisaillement et de viscosité de cisaillement sont réunies dans le tableau 2.

Type d'échantillon	$C_S (m.s^{-1})$	$\alpha_S (m^{-1})$	f (Hz)	$\mu_1$ (Pa)	$\mu_2$ (Pa.s)
Muscle de boeuf	5,29 $\pm$ 0,14	50 $\pm$ 4	120	21400 $\pm$ 500	22,5 $\pm$ 2,6
Gel d'agar-gélatine	2,74 $\pm$ 0,02	33 $\pm$ 2	130	7960 $\pm$ 77	2,18 $\pm$ 0,17
Produit laitier	0,51 $\pm$ 0,01	37 $\pm$ 3	15	253 $\pm$ 4	1,1 $\pm$ 0,1

Tableau 2 : Valeurs expérimentales de la vitesse de l'atténuation et de la fréquence de l'onde de cisaillement dans trois milieux différents. Les coefficients de Lamé  $\mu_1$  (élasticité de cisaillement) et  $\mu_2$  (viscosité de cisaillement) sont déduits de ces mesures.

La rhéologie des gels, des muscles ou des produits laitiers est un axe de recherche en développement au laboratoire. Les paramètres viscoélastiques n'ont pas fait l'objet d'une comparaison systématique avec les méthodes classiques de mesures rhéologiques (INSTRON, rhéomètre) mais les ordres de grandeurs de l'élasticité de cisaillement semblent en bon accord avec les mesures qu'a effectuées Parker [8] sur les muscles et les gels.

Ces résultats numériques reposent sur deux hypothèses fortes. La première est d'exprimer la viscoélasticité de ces matériaux à travers un modèle de Voigt. L'argument principal en faveur de ce dernier est donné par la mesure expérimentale de la vitesse de phase dans ces matériaux. Elle croît avec la fréquence, Fig.5. Ce résultat n'est pas compatible avec le modèle concurrent de Maxwell. S'il existe de fortes présomptions quant à la pertinence d'un tel modèle, il est possible qu'il faille à l'avenir l'améliorer. La seconde hypothèse qui sous tend les calculs numériques d'élasticité et de viscosité concerne les mesures d'atténuation. Elles sont effectuées en calculant la pente du logarithme de l'amplitude. Dans le cas d'une onde plane, ce calcul donne directement le coefficient d'atténuation. En ce qui concerne l'onde de cisaillement, il faut tenir compte de l'influence du champ intermédiaire. Il a été montré dans ce chapitre (au paragraphe III-4) que la décroissance de l'onde de cisaillement en champ intermédiaire s'effectuait en première approximation selon une loi en  $1/z^2$  où  $z$  représente la profondeur sur l'axe du piston. Nous avons tenu compte de cette décroissance

dans les calculs mais il faudra sans doute dans le futur adopter une approche plus rigoureuse du problème de la diffraction sur les mesures d'atténuations.

Dans le cas particulier des produits laitiers, la surprise vient du fait que ces matériaux d'apparence liquide (yaourt à boire) peuvent véhiculer une onde propre au solide : l'onde de cisaillement. Quoi qu'il en soit, l'existence de cette onde dans des milieux aussi différents que les muscles, les gels ou les produits laitiers rend envisageable l'utilisation de l'élastographie impulsionnelle comme outil rhéologique.

## CONCLUSION

En comparant les modes de vibration monochromatique aux modes de vibration transitoire, l'impact des ondes réfléchies et de la diffraction sur la vitesse des ondes de cisaillement a été montré. L'étude de l'atténuation a conduit au calcul du champ de déplacement dans un solide élastique sur l'axe d'une source ponctuelle. La fonction de Green qui décrit ces déplacements a été simplifiée. Cette équation a permis de comprendre le comportement d'un solide soumis aux sollicitations mécaniques d'un piston ponctuel. Ainsi, la domination de l'onde de cisaillement à de faibles fréquences ou en champ proche a pu être établie. Cette onde de cisaillement a été identifiée comme un terme de « champ intermédiaire ». La particularité d'une onde de cisaillement en champ intermédiaire est de se propager à la vitesse d'une onde transverse et d'avoir une composante longitudinale de déplacement (parallèle à sa propagation). La fonction de Green simplifiée a prédit également les phénomènes d'interférences entre onde de cisaillement et onde de compression, prédiction vérifiée expérimentalement. La compréhension de ces phénomènes a conduit vers l'élaboration d'une méthode originale appelée : élastographie impulsionnelle.

Il existe deux points communs à l'ensemble des études qui ont fait l'objet de ce chapitre : Premièrement, les échantillons utilisés dans les expériences étaient homogènes ou considérés comme tels dans le cas du muscle. Quel résultat peut-on espérer de cette méthode dans le cas d'un matériau non homogène, est-il possible de reconstituer une image grâce aux ondes de cisaillement dans un gel constitué de zones d'élasticités différentes?

Deuxièmement, toutes les études ont porté sur l'axe de symétrie du piston. Quelles informations sont susceptibles de révéler l'étude du champ de déplacement dans tout l'espace?

Ces deux questions sont au centre des investigations menées dans le chapitre IV de ce manuscrit.

## REFERENCES

- 
- 1 K.Fujii, T.Sato,K.Kameyama, T.Inoue, K.Yokoyama an K.Kobayashi, Imaging System of Precise Hardness Distribution in Soft Tissue In Vivo Using Forced Vibration and Ultrasonic Detection, Acoustical Imaging Vol. 21, Edited by J. P. Jones, Plenum Press, New York (1995).
  - 2 V.V.Kazakov and B.N.Klochkov, Low Frequency Mechanical Properties of the Soft Tissue of the Human Arm, Biophysics, **34**, No.4, pp.742-747 (1989).
  - 3 H.F.Pollard, Sound Wave in Solid, pp. 206, ed. Pion Limited, London (1977).
  - 4 A. Lhemery, Un Modèle efficace pour Prédire le Champ Transitoire Rayonné dans un Milieu Elastique par les Transducteurs Ultrasonores, Journal de Physique IV, Colloque C5, supplément au journal de Physique III, Vol.4 (mai 1994).
  - 5 H. L. Oestrecher, "Field and Impedance of an Oscillating Sphere in a Viscoelastic Medium with an Application to Biophysics", J.A.S.A., 23, N°6 (nov. 1951).
  - 6 D.C. Gakenheimer and J. Miklowitz, Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface. Journal of Applied Mechanics **36**, p.505 (1969).
  - 7 K. Aki, P. G. Richards, *Quantitative seismology-Theory and method*, W. H. Freeman and company,(New York 1980) Vol.I, pp.63-84.
  - 8 K. J. Parker, S. R. Huang, R. A. Musulin and R. M. Lerner, « Tissue Response to Mechanical Vibrations for Sonoelasticity Imaging », Ultrasound in Med. & Biol., **16**, n°3, pp.241-246 (1990).

## IV- CARTOGRAPHIE DES DEPLACEMENTS

*La première partie de ce chapitre présente les résultats préliminaires d'élastographie impulsionnelle dans un échantillon qui offre des zones d'élasticité différente. Dans ce type de milieu hétérogène, la phase de l'onde de cisaillement permet d'élaborer une image des « lenteurs » proportionnelle à l'élasticité.*

*La seconde partie de ce chapitre porte sur l'étude du champ de déplacement généré par une pointe dans un demi espace solide (gel d'agar-gélatine). Il montre que les fonctions de Green calculées dans des solides élastiques s'adaptent parfaitement aux tissus biologiques. Bien que les diagrammes de directivité calculés par Miller et Pursey soient employés avec succès en sismologie ou en contrôle non destructif, ils ne sont pas adaptés aux cas des ondes de cisaillement dans les tissus biologiques à cause des effets de champ proche et de champ intermédiaire.*

### **1- Image d'un milieu hétérogène simple: un bicouche<sup>i</sup>**

#### **Montage expérimental**

Une des applications potentielles de l'élastographie impulsionnelle est de construire une cartographie de l'élasticité des milieux biologiques. Dans cette perspective, un premier fantôme très simple constitué de deux zones d'élasticités différentes a été fabriqué. Chacune de ces zones occupe le demi espace délimité par la diagonale du parallélépipède, Fig. 1(a). L'une, constituée du mélange de 3% d'agar avec 2% de gélatine, est en contact avec le transducteur (à gauche du bicouche). L'autre, 3% d'agar et 6% de gélatine, est en contact avec le piston (à droite du bicouche). L'ensemble de l'échantillon occupe un volume de  $8 \times 8 \times 7.5 \text{ cm}^3$ .

Une mesure de phase en fonction de la profondeur est présentée sur la figure 1(b). L'origine des profondeurs correspond à la position du transducteur. A cause de la différence de vitesse de l'onde de cisaillement dans les deux milieux, la phase présente deux segments de droite de pentes différentes. L'intersection se situe autour de 31 mm. La vitesse est calculée dans les deux milieux à

---

<sup>i</sup> Le bicouche est le gel d'agar-gélatine composé de deux parties dont la différence en concentration de gélatine fait apparaître une différence d'élasticité.

partir de l'inverse des deux pentes. Elle est de 3.4 m/s dans la zone « dure » (6% de gélatine), et de 1.6 m/s dans la zone « molle » (2% de gélatine).

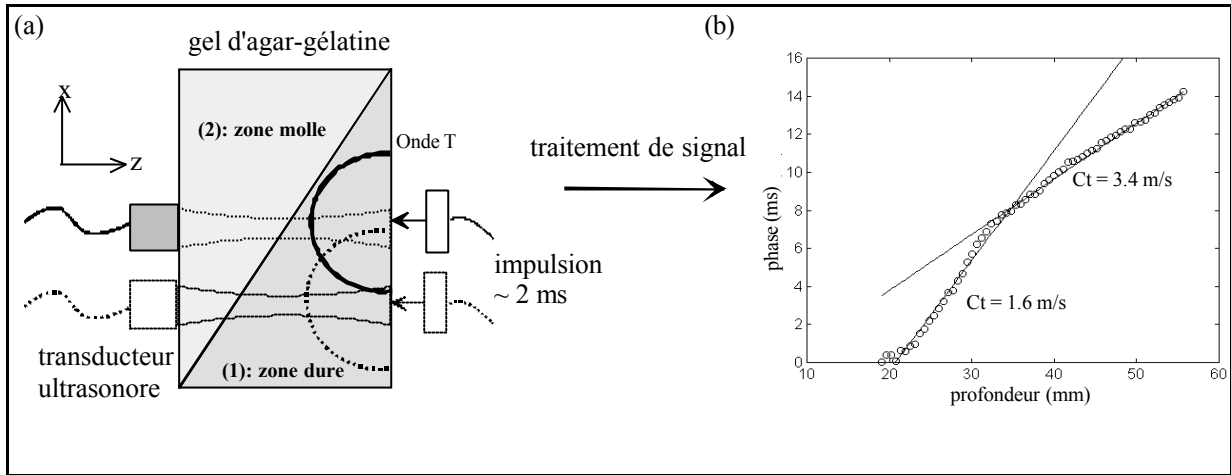


Fig.1 (a) Montage expérimental et (b) phase de l'onde de cisaillement mesurée à partir des déplacements de la Fig.2 dans un gel composé de deux couches d'élasticités différentes.

### Déplacement dans un bicouche

Sur le sismogramme des déplacements dans le bicouche, Fig.2, on distingue, comme dans un gel homogène, l'onde de compression ( $P_1$ ) et l'onde de cisaillement ( $S_1$ ). Le piston se situe à 70 mm de profondeur, le transducteur ultrasonore est à l'origine et l'interface entre la zone dure (1) et la zone molle (2) est à environ 31 mm. Au passage de l'interface, on peut voir une inflexion de l'onde de cisaillement qui traduit le changement de vitesse de phase dans le second milieu. La présence de l'onde de cisaillement dans le second milieu est marquée par le segment de droite ( $S_2$ ). Le passage à l'interface de l'onde de cisaillement s'effectue en faisant apparaître une conversion: une partie de l'énergie de cette onde se propage dans le milieu 2 sous forme d'une onde de compression (segment  $P_2$ ).

L'amplitude de l'onde de cisaillement est très perturbée par le passage d'un milieu à l'autre et il est difficile d'en tirer une information pertinente. En revanche la phase, Fig.1(b), n'est affectée lors du changement de zone que par un changement de pente. C'est donc sur la mesure de la phase de l'onde de cisaillement que repose l'image qui est présentée dans la suite. Après avoir calculé la phase, le piston et le transducteur sont déplacés de 2 mm sur l'axe des  $x$ , en pointillé Fig.1(a). Une nouvelle courbe des phases en fonction de la profondeur dans une nouvelle région de l'échantillon est

enregistrée. On recommence l'opération et ainsi de suite. Finalement, à partir du scan complet de la phase, on affiche sur une image en niveau de gris la dérivée de la phase. Il s'agit physiquement de l'inverse de la vitesse: la lenteur. Le choix d'une cartographie des lenteurs plutôt que des vitesses s'impose car la vitesse prend une valeur infinie lorsque la pente s'annule localement et ne peut être codée en niveau de gris.

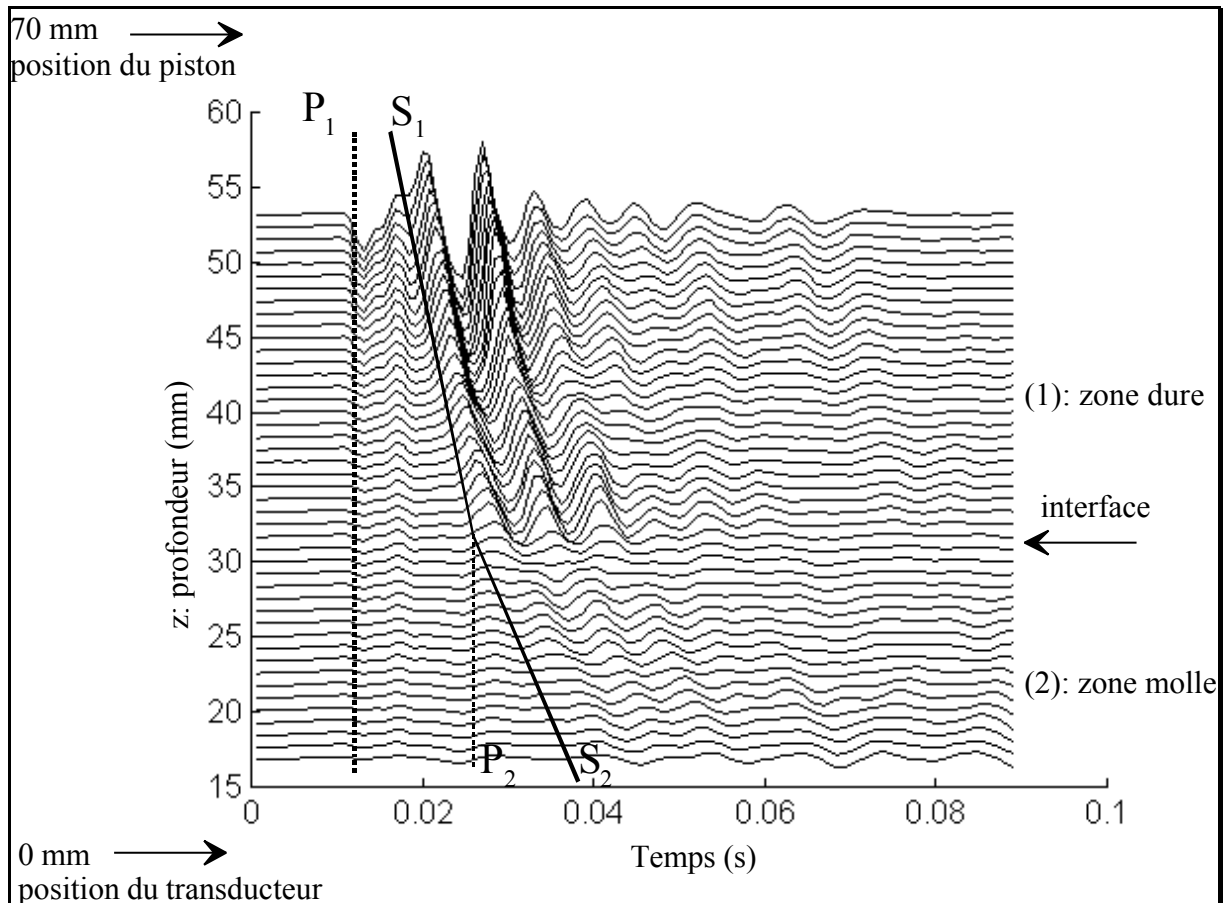


Fig.2 Déplacements mesurés dans un gel composé de deux couches d'élasticité différente. L'interface se situe à 31 mm. On distingue la différence de vitesse de l'onde de cisaillement dans le milieu 1 et 2 (inclinaison des segments  $S_1$  et  $S_2$ ) ainsi que la conversion à l'interface de l'onde de cisaillement en onde de compression (segment  $P_2$ )

### Image de lenteurs

L'image représentée sur la figure 3 contient 22 courbes des lenteurs interpolées. Les deux parties du bicouche apparaissent clairement. La zone claire représente la région où la vitesse de

l'onde de cisaillement est la plus faible, c'est à dire la zone *molle* (en bas de l'image). La zone sombre représente la région où la vitesse est la plus élevée, c'est à dire la zone *dure* (en haut de l'image).

On distingue également dans la zone dure une bande claire qui suggère l'existence d'une inclusion de matière molle. Il s'agit en fait d'un artefact car après destruction de l'échantillon, une telle inclusion n'a pu être trouvée. Cet artefact a sans doute pour origine la réflexion d'une onde à l'interface ou la présence d'une onde de Stoneley [1], onde susceptible d'apparaître à l'interface de milieux d'impédance voisine.

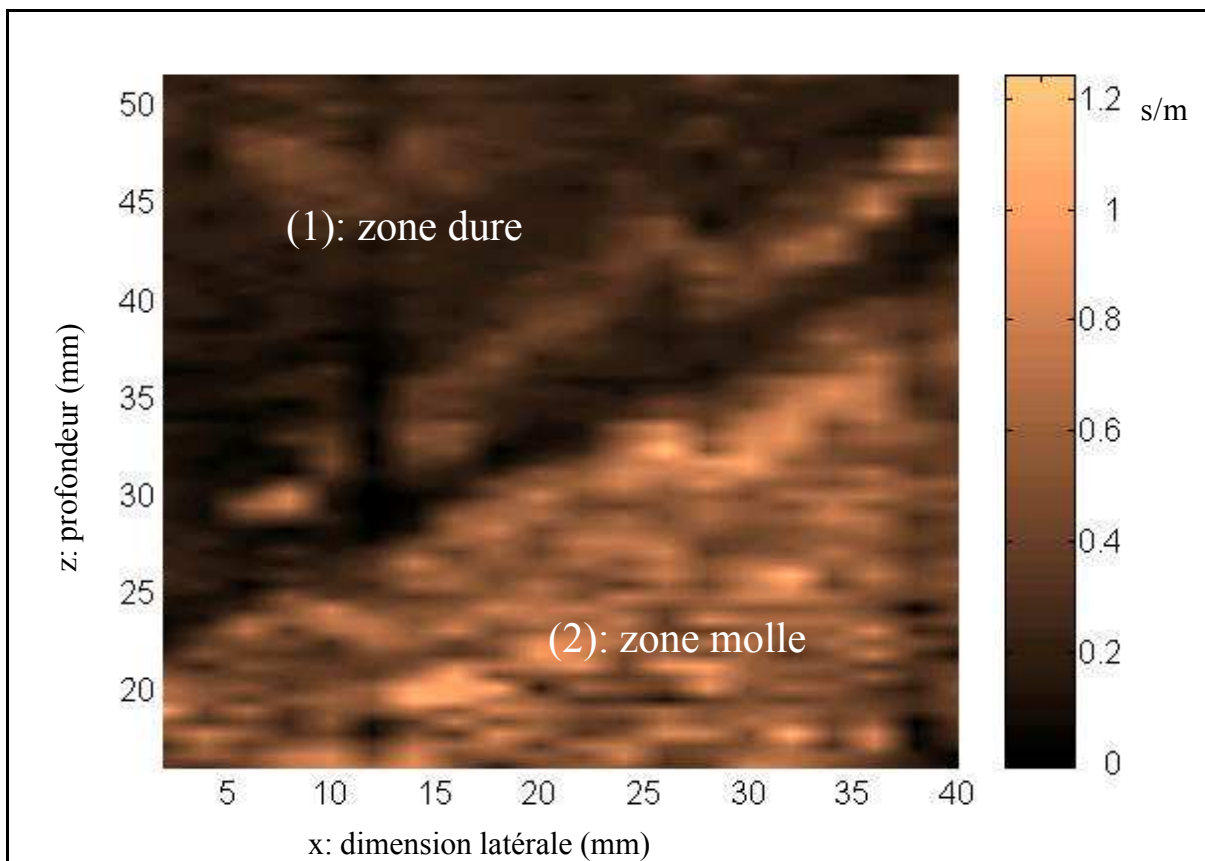


Fig.3: Image des lenteurs d'un gel composé de deux régions d'élasticité différente avec la technique d'élastographie impulsionnelle.

### Ordre de grandeur d'élasticité

Lorsque la viscosité peut être négligée devant l'élasticité, la vitesse est proportionnelle à la racine de l'élasticité de cisaillement  $\mu$ , Eq.(1). Dans la zone molle, la vitesse est 2 fois plus faible que



dans la zone dure. Cette dernière présente donc une élasticité environ 4 fois plus élevée d'après l'équation (1) qui n'est valable en toute rigueur que dans les solides parfaitement élastiques.

$$\mu = \rho C_s^2 \quad (1)$$

Dans cette équation,  $\mu$  est l'élasticité de cisaillement,  $\rho$  la masse volumique et  $C_s$  la vitesse de phase des ondes de cisaillement. Elle est un cas limite de la vitesse donnée par l'équation (2) du chapitre III lorsque la viscosité est nulle. Dans le cadre de cette approximation, les valeurs numériques d'élasticité de cisaillement sont  $\mu=2816$  Pa pour la zone molle et  $\mu=12716$  Pa pour la zone dure.

Par comparaison, les fibroadénomes, nodules durs qui apparaissent chez les personnes atteintes du cancer du sein, sont en moyenne 4 fois plus durs que les tissus sains. D'après ces mêmes études, les valeurs extrêmes atteintes par certains nodules sont 8 fois supérieures à la normale [2]. Par conséquent, l'image des lenteurs Fig.3 est construite à partir d'un milieu dont les caractéristiques mécaniques sont celles qui sont susceptibles d'être rencontrées lors d'expérience *in vivo*. Il reste beaucoup à faire pour comprendre et améliorer la résolution d'un tel système d'imagerie mais ces résultats sont encourageants dans la mesure où ils prouvent la grande sensibilité des ondes de cisaillement aux variations d'élasticité.

L'avenir de cette technique en tant que système d'imagerie repose probablement sur la résolution du problème inverse comme c'est le cas en sismologie. Le problème se pose en ces termes: comment évaluer les caractéristiques physiques d'un milieu par la donnée du champ de déplacement en fonction du temps. L'élastographie impulsionnelle présente deux avantages sur la sismologie pour accomplir cette tâche. En premier lieu, les variations de vitesse des ondes ultrasonores sont faibles dans les tissus biologiques, par conséquent, il est possible de relier le temps d'arrivée d'un écho à la position du diffuseur qui lui a donné naissance. L'information sur la profondeur est conservée ce qui n'est pas le cas en sismologie car les vitesses varient énormément selon le manteau de matière traversé. En second lieu, il est possible de mesurer les déplacements de matière non seulement en surface mais aussi au sein de la matière. Cela reviendrait en sismologie à placer des sondes dans le sous-sol. La résolution du problème inverse en élastographie impulsionnelle semble donc *a priori* plus facile qu'en sismologie.

## **2- Champ de déplacement et diagramme de directivité**

Que ce soit dans l'optique d'obtenir une mesure locale ou globale de l'élasticité, la génération des ondes de cisaillement s'effectue en utilisant comme source de vibration un piston acoustique. Le problème du champ de déplacements généré par ces sources dans les tissus biologiques est plus complexe que le problème de la génération d'ondes acoustiques dans les fluides. L'objet des paragraphes suivants est d'étudier ce champ dans le cas d'un piston ponctuel. La théorie de la diffraction dans les solides (via les fonctions de Green) qui nous a permis de décrire les déplacements sur l'axe du piston est étendue à tout l'espace. Là encore, les résultats expérimentaux concordent bien avec les prédictions des fonctions de Green. Elles permettent notamment de mettre en évidence l'importance du rôle joué par le champ proche<sup>ii</sup>.

### Montage expérimental

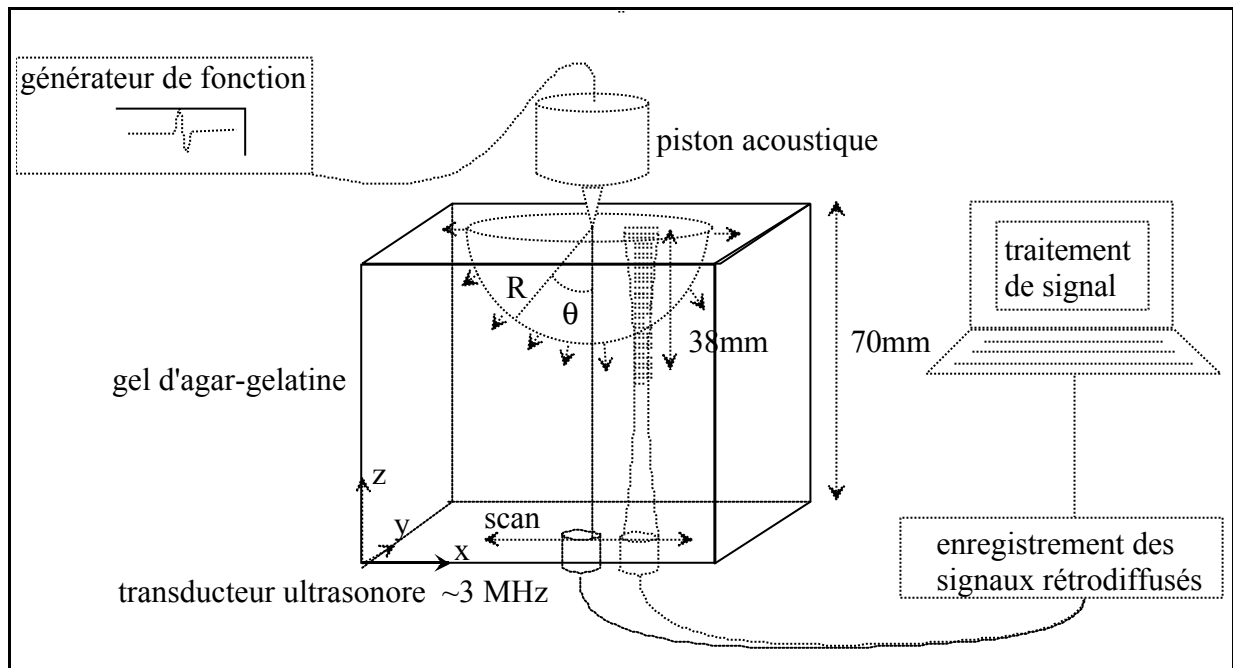


Fig.4: Montage expérimental: un transducteur ultrasonore de 3 MHz insonifie un gel d'agar-gélatine pendant la propagation d'une impulsion mécanique de fréquence centrale 250 Hz. Pour chaque position du transducteur les amplitudes des ondes de compression et de cisaillement sont calculées.

<sup>ii</sup> La distinction entre champ proche et champ intermédiaire n'est pas utile dans la suite de ce chapitre. Les effets du champ proche et du champ intermédiaire n'ont pas fait l'objet d'une étude séparée. Nous opposerons donc au terme de « champ lointain » le terme de « champ proche » qui confond le champ proche et le champ intermédiaire tels qu'ils ont été définis au chapitre III.

Un gel d'agar-gélatine est placé entre un piston ponctuel et un transducteur ultrasonore, Fig.4. Le gel de dimension 10x10x7 cm se compose de 3% d'agar et de 6 % de gélatine. L'idée fondamentale, déjà décrite au chapitre II, est la suivante: les vibrations de basse fréquence du piston (sur le dessus de l'échantillon) induisent des mouvements de basse fréquence des diffuseurs au sein du milieu, mouvement que l'on mesure en corrélant les signaux rétrodiffusés successifs; chacun d'entre eux rend compte de l'état vibratoire de la matière à un instant donné. Une telle méthode donne la composante des déplacements entre deux signaux le long du faisceau ultrasonore. Le transducteur ultrasonore est disposé sur la face opposée au piston. Au début de l'expérience, les axes du piston et du transducteur sont confondus. Des déplacements représentés sous forme d'un sismogramme, Fig.6, on déduit les amplitudes de l'onde de compression et de l'onde de cisaillement, Fig.7. Ensuite, le transducteur ultrasonore est déplacé le long de l'axe x et un second couple de courbes d'amplitudes est enregistré et ainsi de suite. A la fin nous obtenons un scan complet de l'amplitude des ondes de basse fréquence.

### Ondes générées par une impulsion acoustique

Lorsque l'on génère une impulsion mécanique sur un solide élastique homogène, isotrope et semi-infini, 4 types d'ondes peuvent se propager [3]: trois ondes de volume et une onde de surface. Parmi les ondes de volume, il y a une onde de compression (P), une onde de cisaillement (S), mais aussi une onde de tête (PS), Fig.5. L'onde de tête assure la continuité des contraintes nulles à l'interface (conditions de Dirichlet). Elle se propage en surface sous la forme d'une onde de compression en cédant une partie de son énergie en volume sous la forme d'une onde de cisaillement dans une direction déterminée. Cet angle spécifique est donné par l'expression:  $\theta_c = \arcsin(C_T/C_L)$ . Les valeurs caractéristiques des vitesses des ondes de cisaillement et de compression sont respectivement de 5 m/s et 1500 m/s, par conséquent l'angle spécifique  $\theta_c$  est presque nul ( $\theta_c \approx 0.2^\circ$ ). L'onde de surface (ou onde de Rayleigh R) peut être détectée en volume car elle présente une composante évanescence normale (selon l'axe des z). Cette dernière s'étend sur une profondeur d'environ une longueur d'onde soit environ 1 cm dans les milieux tels que les gels d'agar-gélatine. La vitesse de propagation de l'onde de Rayleigh est donnée avec une bonne précision par la formule de Viktorov [4]:

$$\frac{C_R}{C_T} = \frac{0.718 - (C_T / C_L)^2}{0.75 - (C_T / C_L)^2} = \frac{0.718 - (5/1500)^2}{0.75 - (5/1500)^2} \approx 0.95$$

On trouve donc, pour l'onde de Rayleigh, une vitesse presque identique à celle des ondes de cisaillement. Par conséquent il sera très difficile dans nos expériences, de séparer temporellement ces deux ondes. Les effets de l'onde de Rayleigh seront mis en évidence sur les fonctions de Green angulaires des ondes de cisaillement aux incidences rasantes.

Ces ondes sont représentées sur le schéma de la Fig.5.

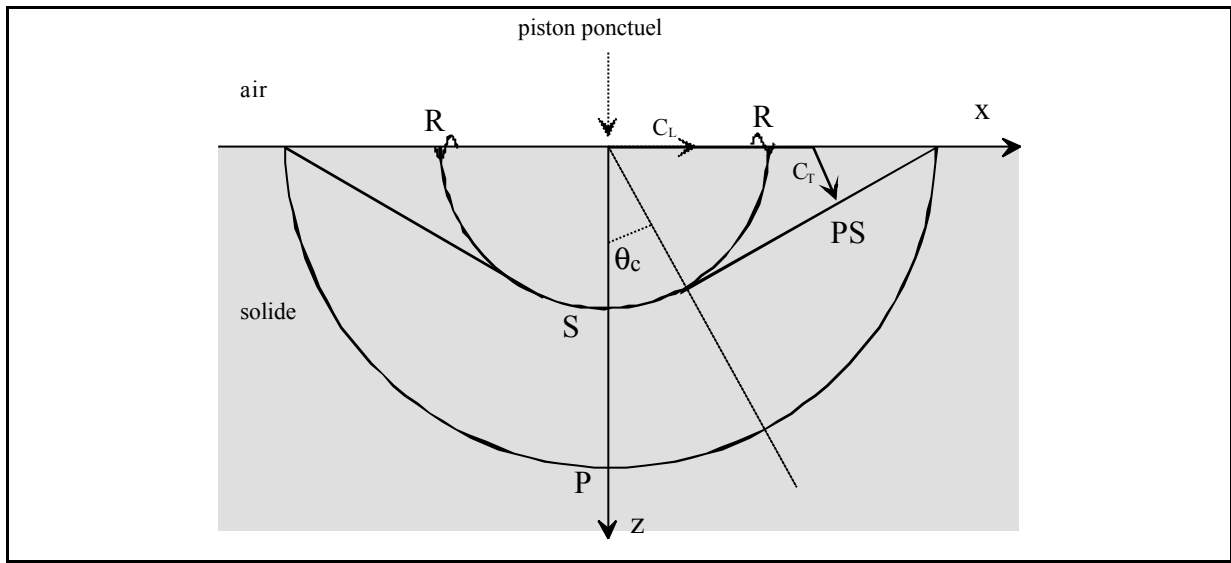


Fig.5 Schéma des 4 types d'ondes générées par une source ponctuelle dans un solide semi-infini: l'onde de compression (P), l'onde de cisaillement (S), l'onde de tête (PS) et l'onde de Rayleigh (R).

Les déplacements sur l'axe de la source sont représentés sur la Fig.6. Chaque ligne représente les déplacements d'une couche de matériau à une profondeur au sein du matériau. A environ 38 ms, l'impulsion acoustique est générée depuis la surface située à 60 mm par le piston quasi ponctuel (le rayon  $a$  du piston est 1 mm). Au temps  $T=38$  ms, une première onde crée des déplacements instantanés sur toute la profondeur: il s'agit de l'onde de compression (P). Une seconde onde se propage du point source vers le transducteur à la vitesse de 4.6 m/s: il s'agit de l'onde de cisaillement (S). Ce sismogramme, Fig.6, ressemble à ceux du chapitre III, mais il présente l'intérêt supplémentaire de montrer une conversion d'onde; lorsqu'elle atteint la face opposée au piston, l'onde de cisaillement est convertie en onde de compression (onde SPR pour cisaillement-

compression-retour) qui se propage alors du transducteur vers le piston (son sens de propagation est donné par l'atténuation de l'onde).

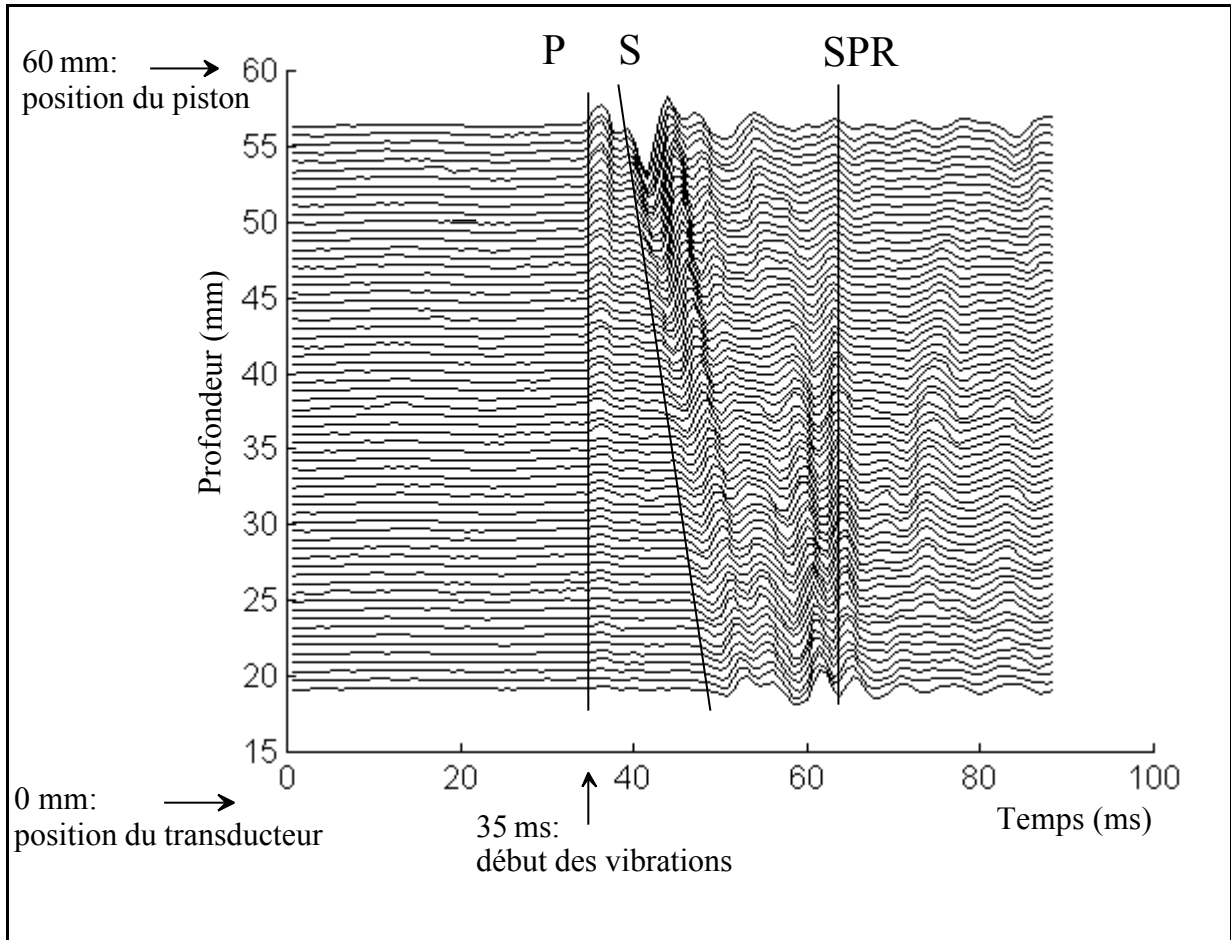


Fig.6: Ces déplacements sont obtenus dans un gel d'agar gélatine à l'épicentre. On peut observer les déplacements dus à une onde compression (P), à une onde de cisaillement (S) et ceux d'une onde de compression issue de la conversion à l'interface d'une onde de cisaillement en onde de compression retour (SPR).

Ensuite, à partir des déplacements dus aux ondes de compression et de cisaillement, l'amplitude de ces ondes en fonction de la profondeur est extraite, Fig.7. L'origine des abscisses correspond pour les deux courbes à la position du piston. Les accidents qui apparaissent sur les courbes d'amplitudes sont causés par la limite de résolution de notre système de mesures de déplacements [5]. En effet, l'amplitude maximale mesurée sur le sismogramme de la figure 6 n'est que de 20  $\mu\text{m}$ .

Les amplitudes, Fig.7 sont mesurées sur l'axe du piston. Ensuite le transducteur ultrasonore est déplacé de 0.5 mm le long de l'axe des x et un nouveau couple de courbes est obtenu. Finalement les scans complets des amplitudes sont affichés sur des images en niveau de gris, Fig.8.

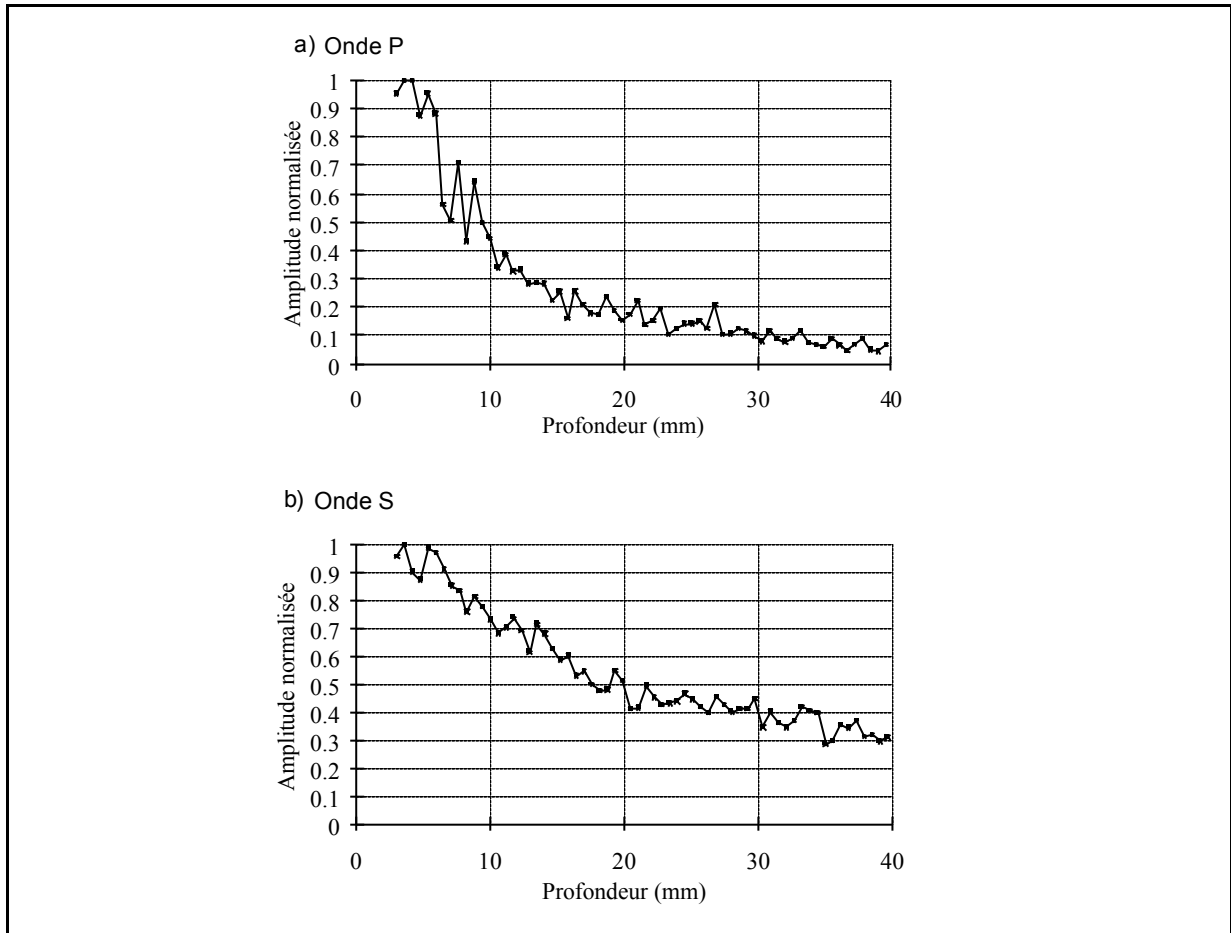


Fig.7: Amplitude de l'onde de compression (a) et de l'onde de cisaillement (b) calculée à partir des déplacements, Fig.6. Chacune de ces courbes constitue une ligne des images, Fig.8(a) et (b).

### Carte d'amplitudes des ondes de compression et de cisaillement.

Les scans des amplitudes des ondes de compression et de cisaillement générées par un piston ponctuel sont représentés Fig.8. Sur la partie droite on peut voir l'image des amplitudes en niveau de gris et sur la partie gauche les courbes d'isoamplitudes extraites de l'image. Les dimensions de l'image sont 30x36 mm. Le piston est à l'origine, en bas à gauche de l'image ou en bas à droite de la courbe d'isoniveau. En ce qui concerne les ondes de compression, Fig.8(a), on constate en première approximation que la source ponctuelle est omnidirectionnelle: la même énergie est envoyée dans toutes les directions. Pour les ondes de cisaillement, la source ponctuelle se comporte différemment:

on distingue, Fig.8(b), la présence de lobes sur l'image et sur les courbes d'isoniveau. Dans ce cas, le maximum d'énergie est généré dans la diagonale à un angle d'environ  $45^\circ$ .

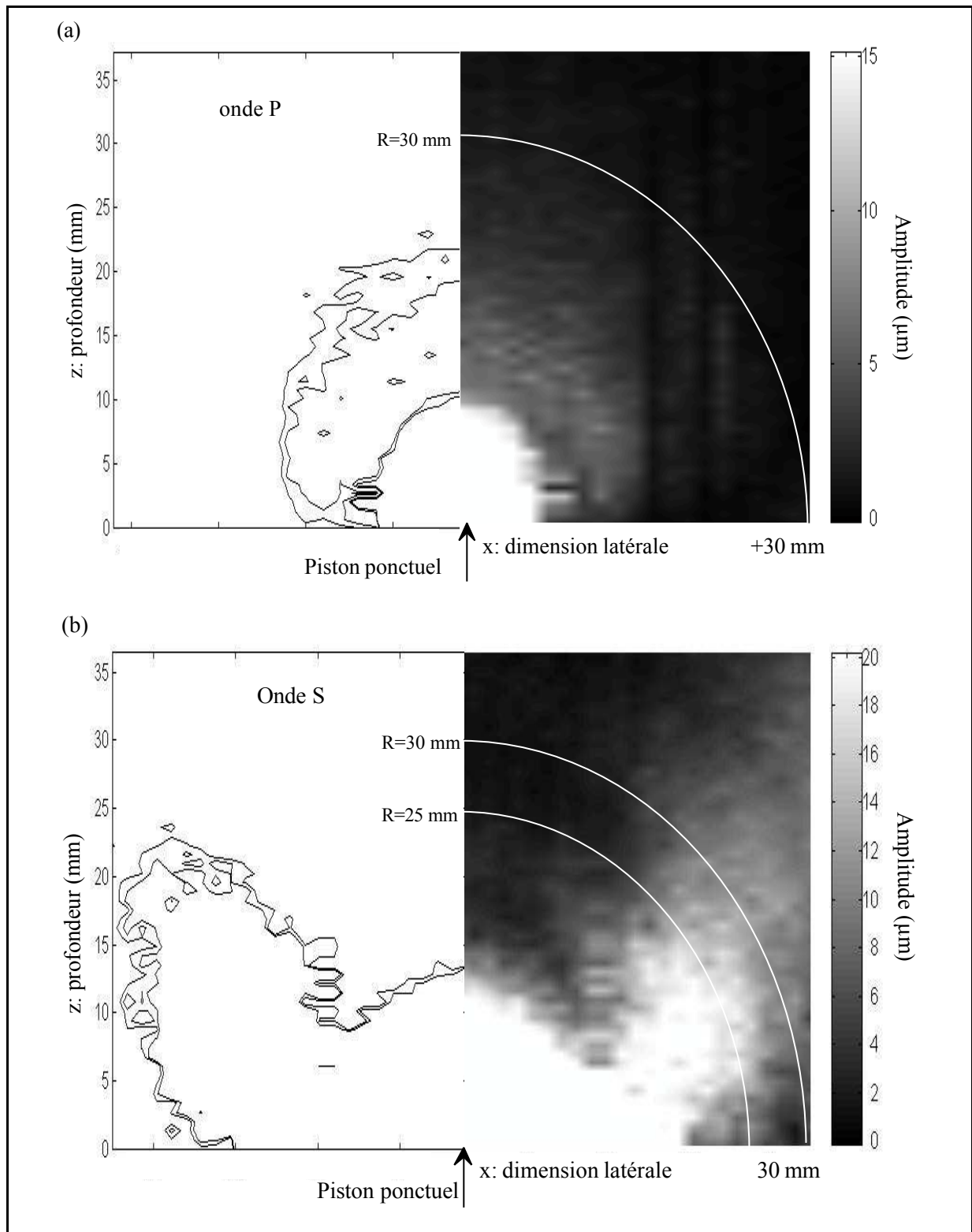


Fig.8 Courbes d'isoamplitude (à gauche) et cartographies (à droite) de la composante normale (selon  $z$ ) de l'amplitude des ondes de compression (a) et de cisaillement (b) générées

*par un piston ponctuel dans un gel d'agar-gélatine. Les valeurs d'amplitudes situées sur les arcs de cercle ont permis de construire les courbes des fonctions de green angulaires, Fig.9 et Fig.10.*

Cette différence fondamentale entre la génération d'ondes de compression et de cisaillement est reliée à la polarité de la source. En effet, un piston ponctuel est une source (presque) monopolaire pour les ondes de compression. Par conséquent, quasiment la même énergie est rayonnée dans toutes les directions. Par contre, un piston ponctuel est une source dipolaire pour les ondes de cisaillement. Dans ce cas, la source n'est pas omnidirectionnelle mais présente des lobes de directivité. C'est ce que l'on observe sur la Fig.8(b). Cette explication est donnée par Scruby et Drain dans le cas de la génération d'ultrasons par laser en régime d'ablation, [6]. Mais il existe une analogie très forte avec la génération d'ondes de basse fréquence par une pointe vibrante. En effet, dans les deux cas, la source est une contrainte quasi ponctuelle de direction parallèle à l'axe de la source (faisceau laser ou piston ponctuel).

Une analyse plus fine du champ de déplacement dans le paragraphe suivant montre qu'en ce qui concerne les ondes de compression, le piston ponctuel n'est pas exactement omnidirectionnel mais génère plus d'énergie sur l'axe de la source. Quant aux ondes de cisaillement, en champ lointain, les lobes de directivité apparaissent autour de l'angle  $\theta = 34^\circ$ .

### **Diagrammes de directivité et fonctions de Green angulaires**

Les courbes des fonctions de Green angulaires expérimentales sont calculées à partir des cartes d'amplitudes, Fig.8. Les amplitudes situées sur les cercles de rayon R (2.5 et 3 cm) sont normalisées, Fig.9 et Fig.10. Deux théories sont comparées aux expériences: la théorie de Miller et Pursey et la fonction de Green calculée par Gakenheimer et Miklowitz [7].

Miller et Pursey ont calculé dans un article de 1954 [8] le champ de déplacements généré par une force ponctuelle appliquée suivant la normale d'un milieu élastique semi-infini en régime monochromatique en faisant l'approximation du champ lointain. Les équations (2) et (3) donnent les amplitudes des ondes longitudinales et transverses. Ces amplitudes dépendent exclusivement de l'angle  $\theta$  (voir Fig.8 chapitre III pour le choix des angles et des référentiels) et du rapport  $\gamma = C_L/C_T$ .



$$A_L(\theta) = \frac{\cos\theta (\gamma^2 - 2\sin^2\theta)}{(\gamma^2 - 2\sin^2\theta)^2 + 4\sin^2\theta \sqrt{1-\sin^2\theta} \sqrt{\gamma^2 - \sin^2\theta}} \quad (2)$$

$$A_T(\theta) = \frac{\sin 2\theta \sqrt{\gamma^2 - \sin^2\theta}}{(1 - 2\sin^2\theta)^2 + 4\sin^2\theta \sqrt{1-\sin^2\theta} \sqrt{\gamma^2 - \sin^2\theta}} \quad (3)$$

$A_L(\theta)$  est la composante radiale de l'amplitude de l'onde longitudinale et  $A_T(\theta)$  est la composante tangentielle de l'onde transverse. Pour comparer la théorie de Miller et Pursey avec les mesures expérimentales (les déplacements selon l'axe z), on affichera plutôt les composantes normales:

$$A_L^z(\theta) = A_L(\theta) \cos(\theta) \quad \text{et} \quad A_T^z(\theta) = A_T(\theta) \sin(\theta).$$

Les fonctions de Green calculées par Gakenheimer and Miklowitz donnent la solution exacte de l'équation de propagation lorsque les conditions aux frontières (condition de Dirichlet) et les conditions initiales sont prises en compte (se reporter à l'annexe A pour l'expression mathématique de cette solution). Elles décrivent le champ de déplacement en fonction de l'espace et du temps lorsqu'un solide élastique semi-infini est soumis à l'action d'une force ponctuelle. La comparaison de ces deux théories permet de mettre en évidence les effets de champ proche.

La fonction de Green angulaire des ondes de compression dans le gel d'agar-gélatine montre que le piston ponctuel n'est pas omnidirectionnel comme il pouvait apparaître sur l'image, Fig.8(a). L'énergie maximum est générée le long de l'axe du piston à  $0^\circ$ , Fig.9(a). Ceci est bien prédit par la théorie de Miller et Pursey et par les fonctions de Green calculées à  $R=3$  cm et  $R=30$  m. On note toutefois que l'amplitude expérimentale ainsi que la fonction de Green à 3 cm passent par un minimum autour de  $70^\circ$  puis augmentent de nouveau jusqu'à atteindre un maximum local à  $90^\circ$ . Il s'agit sans doute d'une conséquence des conditions libres aux frontières. Notre interprétation est la suivante : la compression de la matière sur l'axe du piston entraîne l'apparition d'une contrainte en tout point du volume à la vitesse des ondes de compression. Aucune résistance ne s'oppose à cette contrainte sur les bords de l'échantillon. Les déplacements au voisinage de la surface s'effectuent donc de l'intérieur vers l'extérieur dans le sens contraire au piston. Ceci se traduit par un changement de signe des déplacements et par conséquent par un passage à zéro de l'amplitude. Ce phénomène n'apparaît pas sur le diagramme de directivité de Miller et Pursey, Fig.9(b).

Malgré cette divergence entre les deux théories, elles donnent le même résultat en champ lointain, Fig.9(b). Pour des ondes de compression à 200 Hz (donc de longueur d'onde égale à 7.5 m dans un gel), il est intéressant de noter que le champ lointain est atteint à une distance de quelques dizaines de mètres (ici  $R=30m$ ) de la source.

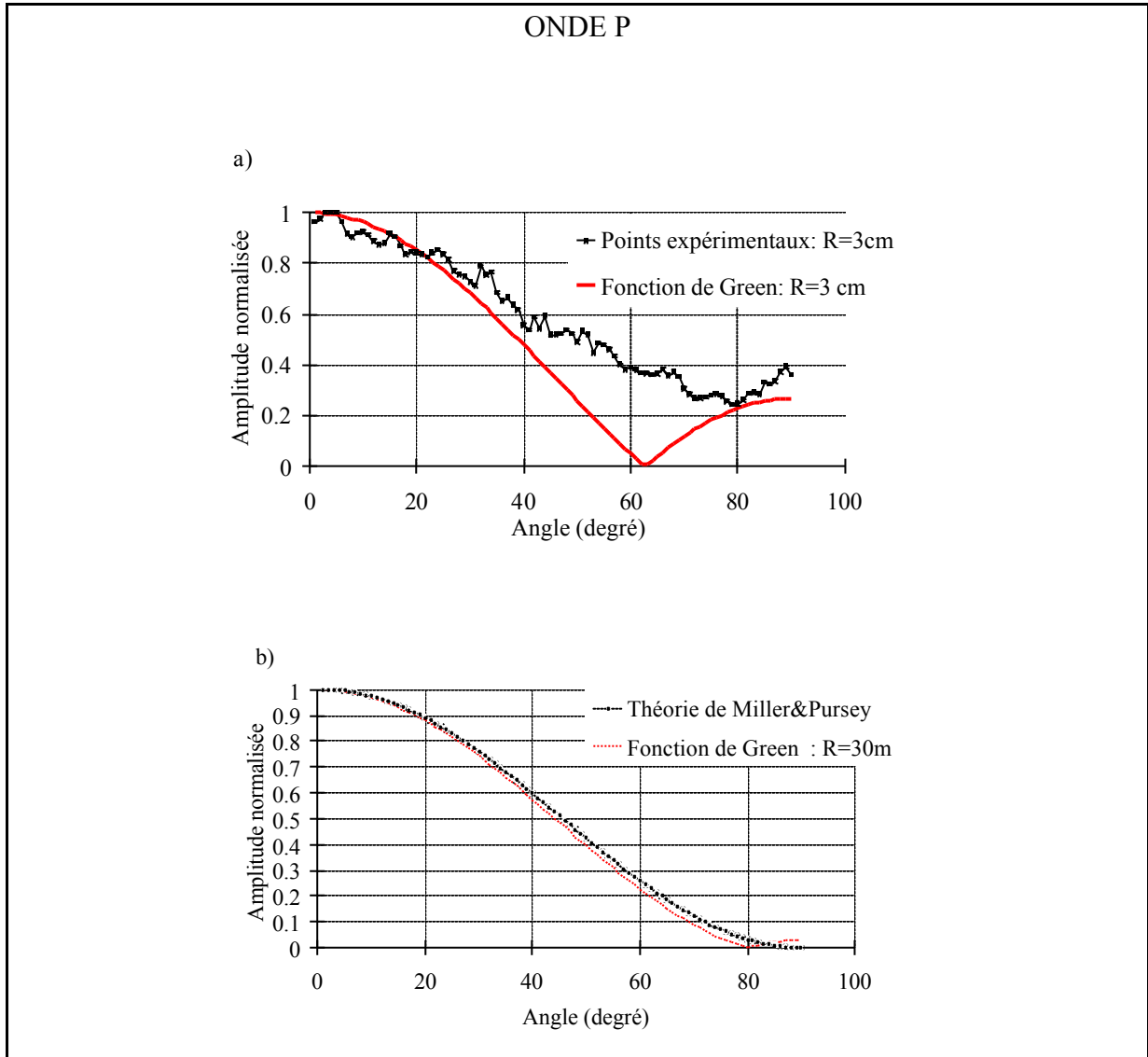
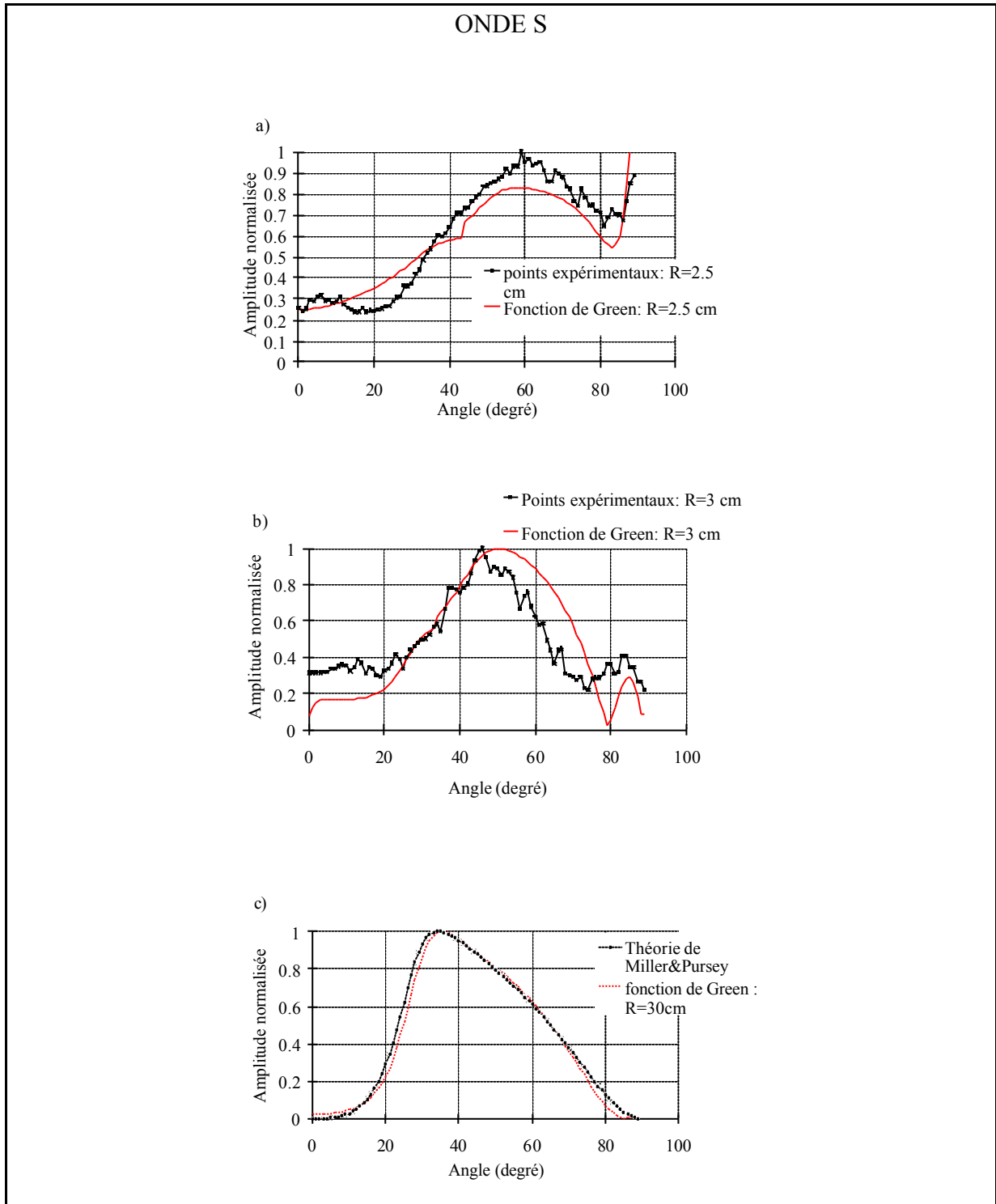


Fig.9: Diagramme de directivité et fonctions de Green angulaires d'une onde de compression en champ proche (a) et en champ lointain (b).

Les fonctions de Green angulaires, Fig.10, montrent que le maximum d'énergie générée sous la forme d'une onde de cisaillement dépend du rayon  $R$  du cercle sur lequel les mesures d'amplitudes sont effectuées. Pour un rayon  $R=2.5 cm$ , le lobe principal se situe à  $60^\circ$  sur la fonction de Green angulaire et sur les déplacements expérimentaux, Fig.10(a). Pour  $R=3 cm$ , ce lobe se trouve à  $50^\circ$ ,

Fig.10(b). Si l'on dispose d'un échantillon de grande dimension ( $30 \times 30 \times 30 \text{ cm}^3$ ), on peut prédire que cet angle diminue jusqu'à sa valeur minimum (valable en champ lointain):  $35^\circ$ . En effet, la fonction de Green et la théorie de Miller et Pursey donnent de nouveau le même résultat en champ lointain ( $R=30 \text{ cm}$ ), Fig. 10(c). On peut remarquer que dans des milieux aussi différents que les tissus mous et les métaux, ce maximum apparaît en champ lointain presque aux mêmes angles: tissus mous  $\rightarrow 35^\circ$ , argent  $\rightarrow 38^\circ$ , aluminium  $\rightarrow 34^\circ$ .

Un second maximum local est visible à  $90^\circ$  sur la Fig.10(a) et à  $85^\circ$ , Fig.10(b). Ce maximum local est probablement l'effet de la composante évanescence de l'onde de Rayleigh. Sa profondeur de pénétration en volume est d'environ  $1 \text{ cm}$  (une longueur d'onde), ce qui la rend apparente sur le cercle de rayon  $R=3 \text{ cm}$  aux angles supérieurs à  $70^\circ$ .



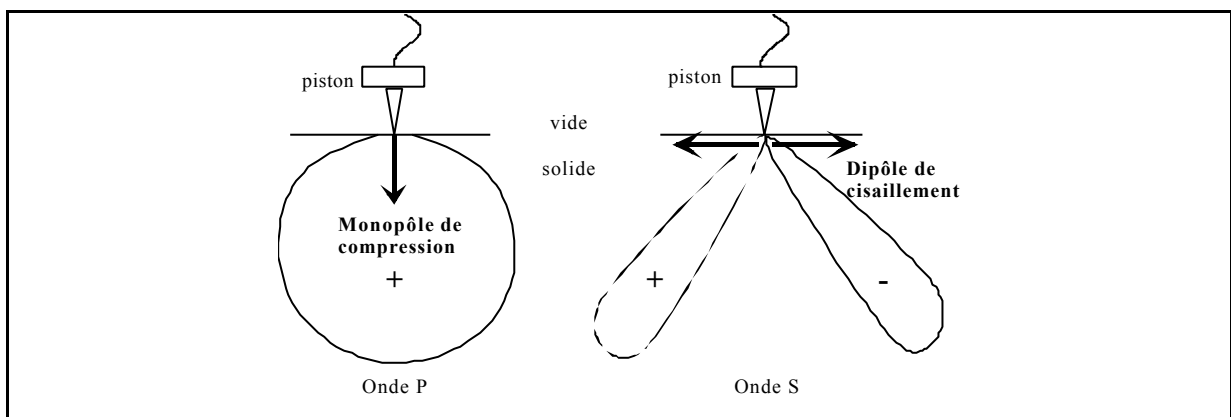
*Fig.10 Diagramme de directivité et fonction de Green angulaire d'une onde de cisaillement en champ proche (a)  $R=2.5$  cm, (b)  $R=3$  cm, et en champ lointain (c)  $R=30$  cm.*

Cette section montre que, dans les tissus biologiques, un piston ponctuel rayonne un maximum d'énergie sous la forme d'une onde de compression à l'épicentre (à  $0^\circ$  de la normale). Ce piston rayonne en outre un maximum d'énergie sous la forme d'une onde de cisaillement à  $35^\circ$  de la

normale en champ lointain. Il est également montré que le champ de déplacement est décrit de manière satisfaisante par la théorie de la diffraction dans les solides. Toutefois, la spécificité de ces milieux (faible vitesse des ondes de cisaillement) impose l'utilisation des fonctions de Green exactes pour prédire le champ de déplacement. Les formules de diffraction en champ lointain de Miller et Pursey, couramment utilisées dans le domaine de la génération d'ultrasons par laser [6], [9], ne sont pas adaptées en élastographie impulsionnelle; les effets de champ proche sont prépondérants dans les tissus biologiques aux fréquences utilisées (audiofréquence).

### Interprétations physiques des fonctions de Green

Aux questions « comment génère-t-on une onde de cisaillement avec un piston? » et « comment une onde de cisaillement peut-elle avoir une composante longitudinale? », nous avons répondu en utilisant l'outil mathématique et en présentant les fonctions de Green. L'objet de ce paragraphe est de proposer une explication « avec les mains » en faisant une synthèse de ce qui a été vu dans ces chapitres.



*Fig.11: Schéma de la polarité du piston ponctuel comme source d'onde de compression et comme source d'onde de cisaillement. Les flèches indiquent les contraintes de compression ou les contraintes de cisaillement.*

Lorsqu'un piston s'enfonce dans un solide viscoélastique, il crée à la fois une déformation de compression et une déformation de cisaillement. Ces déformations donnent naissance aux ondes de compression et de cisaillement. Or le piston s'apparente à une source monopolaire pour les déformations de compression et à une source dipolaire pour les déformations de cisaillement, Fig. 11.

C'est ce caractère monopolaire ou dipolaire de la source qui est responsable de la différence entre les diagrammes de directivité: un seul lobe pour les ondes de compression et deux lobes en opposition de phase pour les ondes de cisaillement. Cette opposition de phase se traduit dans l'équation de Miller et Pursey, Eq.3, par un changement de signe des déplacements de part et d'autre de  $\theta = 0^\circ$  (à cause du terme en  $\sin 2\theta$ ). Elle rend compte de la symétrie cylindrique du problème: des déplacements en phase briseraient cette symétrie. Expérimentalement, le sismogramme de la figure 12(b) met en évidence cette opposition de phase: les déplacements transverses d'une onde de cisaillement monochromatique montrent qu'ils changent de signe en s'annulant sur l'axe du piston situé à 50 mm du transducteur.

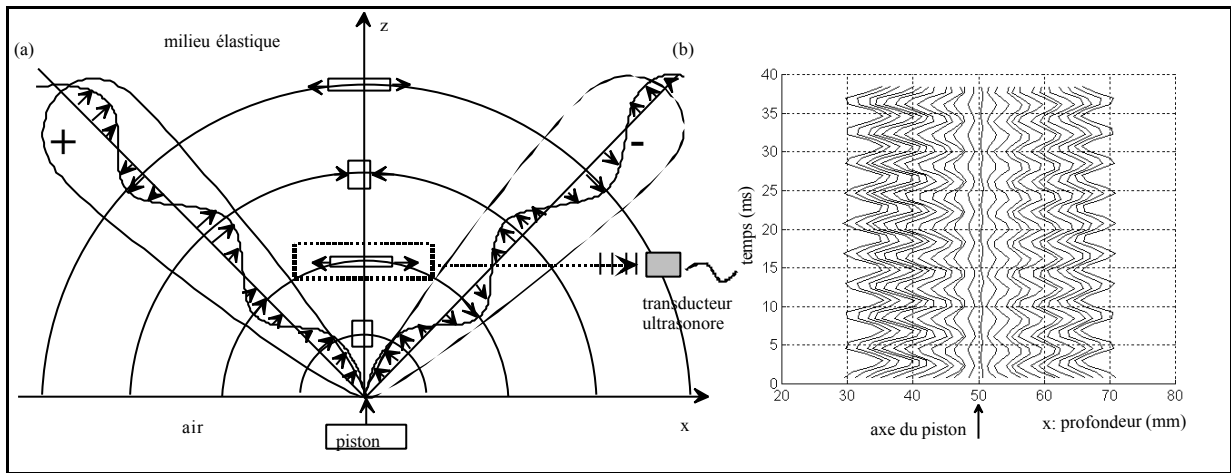


Fig.12: (a) Schéma d'explication de la composante longitudinale des déplacements de l'onde de cisaillement sur l'axe. (b) Sismogramme expérimental. Il met en évidence l'opposition de phase des déplacements transverses (suivant x) d'une onde de cisaillement monochromatique de part et d'autre de l'axe du piston.

Or, l'onde de cisaillement se propage sans modifier le volume du milieu qu'elle traverse (hypothèse d'incompressibilité). Par conséquent, les éléments de volume situés sur l'axe du piston sont animés de mouvements longitudinaux causés par la propagation de l'onde de cisaillement. Ils sont tantôt étirés, tantôt comprimés mais conservent toujours le même volume, Fig.12(a). Cette dernière condition implique nécessairement l'existence d'une composante longitudinale suivant l'axe de la source (suivant z), Fig. 13. Cette composante est la conséquence de l'incompressibilité du milieu et de l'opposition de phase des déplacements par rapport à l'axe de la source. L'hypothèse d'incompressibilité du milieu de propagation vis à vis des ondes de cisaillement est justifiée car, dans

les milieux biologiques, l'élasticité de cisaillement est plus faible que l'élasticité de compression d'un facteur  $10^6$ .

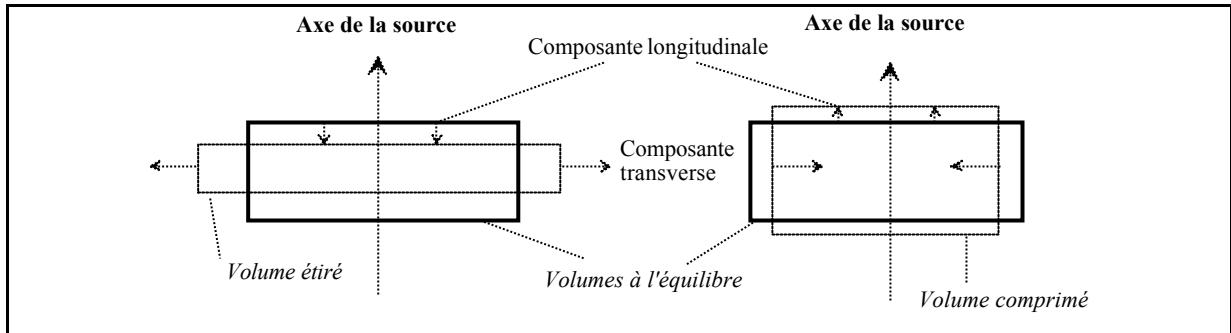


Fig.13: Schéma explicatif de la composante longitudinale d'un élément de volume situé sur l'axe soumis à l'étirement et à la compression causés par la propagation d'une onde de cisaillement. Les volumes en trait plein (à l'équilibre) et en pointillé (volume étiré ou comprimé) sont identiques selon l'hypothèse d'incompressibilité.

Cette description de la composante longitudinale de l'onde de cisaillement permet d'expliquer la forme temporelle de la fonction de Green à l'épicentre. Que constate-t-on, Fig.14? Les déplacements théoriques et expérimentaux dus à la propagation de l'onde de compression sont en opposition de phase avec ceux de l'onde de cisaillement. Lorsque le piston s'enfonce dans le matériau (vers le bas), le déplacement de matière est véhiculé par l'onde de compression en conservant ce sens de déplacement. Les déplacements de l'onde de compression, Fig.14, sont d'abord négatifs (vers le bas). En revanche, lorsque le piston s'enfonce, les déplacements générés par le dipôle de cisaillement sont dirigés préférentiellement vers l'extérieur dans le sens des flèches sur le schéma, Fig.11. La propagation de l'onde de cisaillement s'effectue d'abord par un étirement des éléments de volume situés sur l'axe. Cela entraîne l'apparition d'une composante longitudinale de déplacement dirigée vers le piston, Fig.13, de signe opposé au déplacement de l'onde de compression. Par conséquent, Fig.14, les déplacements de chacune des ondes sont de même forme (sinusoïde amortie) mais de signe contraire.

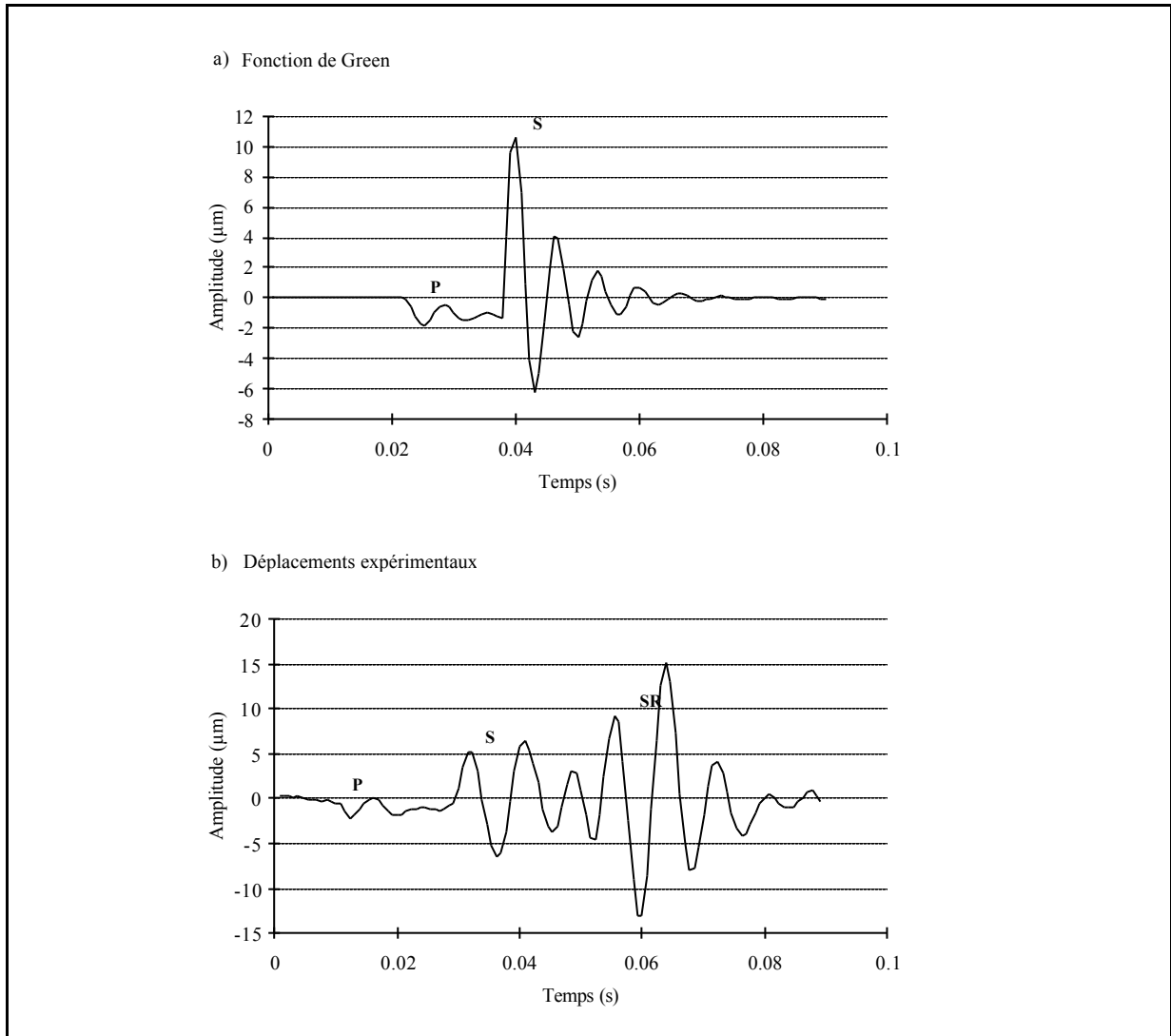


Fig.14: Composante longitudinale (suivant  $z$ ) de la vitesse particulaire théorique (a) et expérimentale (b) en fonction du temps à 50 mm du piston sur son axe. Ces courbes sont tirées des sismogrammes Fig.12 et Fig.13 du chapitre III. On distingue les déplacements de l'onde de compression (P), de l'onde de cisaillement (S) et dans l'expérience, les déplacements d'une onde de cisaillement retour (SR).

## Conclusion du chapitre

L'étude du champ de déplacement dans les tissus biologiques par la méthode d'élastographie impulsionnelle permet d'obtenir deux types d'images: une image des lenteurs de l'onde de cisaillement (proportionnelle à l'élasticité) et une image de l'amplitude des ondes de cisaillement. La première justifie l'intérêt que suscite cette onde dans le domaine médical. Elle montre en effet une cartographie quantitative d'élasticité d'un bicoche. La réalisation de cet image s'est



effectuée à partir des mesures de phase. A terme, il est probable que l'élastographie impulsionnelle deviendra un outil d'investigation des milieux biologiques très utile lorsqu'elle sera couplée à un algorithme de résolution du problème inverse, comme c'est le cas en sismologie. De ce point de vue, l'élastographie impulsionnelle possède des atouts. Elle permet en effet de connaître le champ de déplacement dans tout le demi espace à explorer.

L'image des amplitudes générées par une source ponctuelle dans un gel d'agar-gélatine a montré l'importance du champ proche et du champ intermédiaire sur les ondes de basse fréquence. C'est pourquoi les diagrammes de directivité calculés par Miller et Pursey dans les solides ne sont pas adaptés aux dimensions des échantillons utilisés en élastographie impulsionnelle compte tenu des fréquences des ondes de cisaillement.

En fin de chapitre une synthèse globale est proposée à partir d'interprétations physiques des fonctions de Green. Elle donne une justification «mécanique » à la composante longitudinale de l'onde de cisaillement ainsi qu'à la forme temporelle des ondes de basse fréquence sur l'axe.

REFERENCES

---

- 1 K. Aki, P. G. Richards, *Quantitative Seismology. Theory and Methods*, W. H. Freeman and company, (New York 1980) Vol.I, p.162.
- 2 Sarvazyan, 'shear Acoustic Properties of Soft Biological Tissues in Medical Diagnostics', Proceedings of the 125<sup>th</sup> Meeting J. Acoust. Soc. Am. 93 (part 2), 2329, 1993.
- 3 A. Llan and J. P. Weight, 'The Propagation of Short Pulses of Ultrasound from a Circular Source Coupled to an Isotropic Solid', J. Acoust. Soc. Am., **88** (2) (August 1990).
- 4 I. A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves*, p. 3, Plenum Press, New York (1970).
- 5 W. F. Walker and G. E. Trahey, 'A Fundamental Limit on the Performance of Correlation Based on Phase Correction and Flow Estimation Technique, IEEE, Trans. Ultr. Fer. Freq. Contr., **41**, N°5 (September 1994).
- 6 C. B. Scruby, L. E. Drain, *Laser Ultrasonics*, Adam Hilger (New York 1990), Chap.5, pp.223-324.
- 7 D. C. Gakenheimer and J. Miklowitz, 'Transient Excitation of an Half Space by a Point Load Traveling on the Surface', J. Appl. Mech., **36**, 505 (1969).
- 8 G. F. Miller and H. Pursey, 'The Field and Radiation Impedance of Mechanical Radiators on the Free Surface of a Semi-Infinite Isotropic Half Space', Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **233**, pp. 521-541 (1954).
- 9 B. Pouet, Modélisation Physique par Ultrasons laser, Application à la Prospection Sismique, Thèse, Université de Paris VII, Paris, Avril 1991, Chap.I, pp.34-39.

## CONCLUSION

En acoustique ultrasonore, les tissus biologiques sont souvent considérés comme des fluides hétérogènes. Sollicités par des vibrations mécaniques de basse fréquence, ils révèlent leurs propriétés en tant que solide élastique. L'apport essentiel de cette thèse est d'utiliser les fonctions de Green dans les solides élastiques pour décrire les phénomènes physiques liés aux ondes de basse fréquence dans les tissus biologiques.

Dans le chapitre I nous avons décrit deux méthodes ultrasonores dont le but est d'obtenir l'image du module d'Young des tissus biologiques : l'élastographie (méthode statique) et la sonoélasticité (méthode dynamique). Bien que leur approche diffèrent, ces deux méthodes présentent l'inconvénient d'être sensibles aux conditions aux frontières. Nous nous sommes intéressés à ce problème à travers la méthode dynamique.

L'outil que nous avons mis au point est la sonde à interférométrie speckle ultrasonore. Elle fait l'objet d'une description détaillée au chapitre II. Comme les interféromètres en optique, elle atteint une précision de 1  $\mu\text{m}$  sur les mesures de déplacements, précision largement inférieure à la longueur d'onde ultrasonore du faisceau sonde ( $\lambda/500$ ).

L'étude du champ de déplacement au sein des fantômes ou des muscles sur l'axe d'un piston montre que les vibrations mécaniques de basse fréquence se propage sous la forme d'une onde de cisaillement. Cette onde possède la particularité d'avoir une composante longitudinale. Elle peut donc, lorsque le piston vibre monochromatiquement, interférer avec l'onde longitudinale. La théorie est bien confirmée par les expériences décrites au chapitre III. Ces observations nous ont conduits à élaborer une méthode originale appelée « élastographie impulsionnelle ». Elle présente l'avantage par rapport aux autres techniques d'être indépendante des conditions limites. Si l'on suppose (hypothèse généralement admise) que la rhéologie des milieux biologiques est correctement décrite par le modèle de Kelvin-Voigt, il est possible de mesurer précisément leur élasticité et leur viscosité de cisaillement. Cette méthode peut donc trouver des applications comme outil rhéologique.

Dans le dernier chapitre, l'élastographie impulsionnelle est appliquée à un fantôme hétérogène. L'image des « lenteurs » de l'onde de cisaillement fait bien apparaître les zones d'élasticités différentes. Dans la seconde partie de ce chapitre, l'amplitude des ondes de basse fréquence (onde de compression et onde de cisaillement) sont représentées en niveau de gris sur des

images. Celles-ci montrent que les mesures de déplacements sont effectuées en champ proche. L'étude de ce champ proche montre la pertinence des prédictions des fonctions de Green dans les solides élastiques. Par conséquent, un développement possible de cette méthode consiste à adapter ces fonctions de Green aux solides viscoélastiques dans un premier temps et aux solides inhomogènes en élasticité et en viscosité dans un second temps. Comme en sismologie, l'objectif est de résoudre le problème inverse : reconstruire les caractéristiques du milieu de propagation à partir des déplacements.

Pour réaliser les images du chapitre IV, un transducteur ultrasonore unique est déplacé afin de cartographier la vitesse ou l'amplitude de l'onde de cisaillement. Dans le futur, ce transducteur sera remplacé par une barrette de transducteur de manière à suivre en deux dimensions (et pourquoi pas en trois dimensions) la propagation du front d'onde de cisaillement. L'objectif est la réalisation d'un système d'imagerie sismique du corps humain. C'est le sujet de la thèse commencée au laboratoire en janvier 1998.

## ANNEXE A: LES FONCTIONS DE GREEN D'UN PISTON

Pour une source de force ponctuelle appliquée perpendiculairement à la surface d'un milieu élastique, isotrope et semi-infini, les fonctions de Green ont été calculées par Gakenheimer et Miklowitz. Elles donnent le champ de déplacement dans le solide soumis à des conditions libres aux frontières, lorsque la force délivre une contrainte constante au temps  $t = 0$  s (fonction temporelle en échelon de Heaviside ou fonction marche). Voici, dans les grandes lignes, la méthode de résolution d'un tel problème: les deux équations de propagations du type  $\Delta \xi - \frac{1}{C_j^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$  ( $j=P,S$ ) qui traduisent la

propagation d'une onde solénoïdale (onde de cisaillement S) et d'une onde irrotationnelle (onde de compression P) sont modifiées en utilisant une transformée de Laplace et une transformée de Fourier bidimensionnelle. Cette double transformée est effectuée en tenant compte des conditions initiales (déplacement  $\xi$  et sa dérivée temporelle nulle au temps  $t_0$ , instant auquel est appliquée la contrainte). Le but de cette opération est de supprimer les opérateurs laplacien  $\Delta$  et dérivée seconde temporelle  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . Cette même double transformée est appliquée aux conditions limites

(conditions de Dirichlet partout sauf à l'endroit de la source de force ponctuelle). On obtient alors un système linéaire d'équations qui fournissent les composantes du vecteur déplacement dans l'espace de Laplace et de Fourier. La dernière étape, et aussi la plus difficile, est d'inverser ces solutions pour accéder aux déplacements en fonction du temps et de l'espace Euclidien. Gakenheimer et Miklowitz ont calculé ce champ de déplacement dans le cas général d'une source ponctuelle se déplaçant à la surface d'un solide à la vitesse  $v_s$ . La dépendance temporelle de la contrainte est  $\delta(x - v_s t) Y(t)$ . Le passage à une source immobile ( $v_s=0$ ) correspond alors au cas limite d'une source ponctuelle dont la dépendance temporelle de la contrainte est la fonction de Heaviside  $Y(t)$ <sup>1</sup>.

A cause de la symétrie cylindrique du problème, ces solutions ne dépendent que de  $(r,z)$  (référentiel cylindrique) et sont baptisées  $H_z$  ( $i=r,z$ ). Ces fonctions de Green sont dérivées temporellement une première fois. Ceci revient à calculer la réponse du solide non plus dans le cas d'une sollicitation mécanique en échelon de Heaviside  $Y(t)$  mais dans le cas d'une impulsion de Dirac,  $\delta(t)$ . La fonction de Green  $G(r,z,t)$  est la réponse impulsionnelle de la source ponctuelle. Le point d'observation au sein du solide est repéré soit dans un système de coordonnées cylindriques  $(r,\varphi,z)$ , soit dans un

---

<sup>1</sup>  $Y(t)=1$  si  $t>0$ ,  $Y(t)=0$  si  $t<0$ .

système de coordonnées sphérique  $(R, \theta, \phi)$ . Le point source est situé à l'origine. La fonction de Green,  $G(r, z, t)$ , se décompose en somme de trois termes reliés aux trois types d'onde de volume dans les solides: une onde de compression, Eq.(2), une onde de cisaillement, Eq. (4), et une onde de tête, Eq. (6).

$$\begin{aligned} G_{rz}(r, z, t) &= G_{rz}^P + G_{rz}^S + G_{rz}^{PS} \\ G_{zz}(r, z, t) &= G_{zz}^P + G_{zz}^S + G_{zz}^{PS} \end{aligned} \quad (1)$$

Dans (1),  $G_{iz}^P$  est donnée par:

$$G_{iz}^P(r, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} [H_{iz}^P(r, z, t)] \quad (2)$$

$$H_{iz}^P(r, z, t) = Y(t - t_P) \cdot \int_0^{T_P} \text{Re}[K_i^P(q^P, \eta) \frac{\partial q^P}{\partial t}] d\eta \quad (3)$$

Dans (1),  $G_{iz}^S$  est donnée par:

$$G_{iz}^S(r, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} [H_{iz}^S(r, z, t)] \quad (4)$$

$$H_{iz}^S(r, z, t) = Y(t - t_S) \cdot \int_0^{T_S} \text{Re}[K_i^S(q^S, \eta) \frac{\partial q^S}{\partial t}] d\eta \quad (5)$$

Dans (1),  $G_{iz}^{PS}$  est donnée par:

$$G_{iz}^{PS}(r, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} [H_{iz}^{PS}(r, z, t)] \quad (6)$$

$$H_{iz}^{PS}(r, z, t) = Y(t - t_{PS}) Y(t_B - t) Y\left(\frac{r}{R} - \gamma^{-1}\right) \cdot \int_{A_{PS}}^{T_{PS}} \text{Re}[K_i^S(q^{LT}, \eta) \frac{\partial q^{PS}}{\partial t}] d\eta \quad (7)$$

$\text{Re}[Z]$  est la partie réelle du nombre complexe  $Z$ ,  $\gamma$  est le rapport de la vitesse de l'onde de compression sur la vitesse de l'onde de cisaillement et  $Y(t)$  est la fonction en échelon de Heaviside.

Les temps d'arrivée  $t_P$ ,  $t_S$ ,  $t_{PS}$ , et le temps  $t_B$  vérifient les équations suivantes:

$$\begin{cases} t_P = \frac{R}{C_P} \\ t_S = \frac{R}{C_S} \\ t_{PS} = \frac{R}{C_S} \cos(\theta - \theta_c) \quad \text{avec } \theta_c = a \sin\left(\frac{C_S}{C_P}\right) \\ t_B = \frac{R}{C_P} \cdot \frac{R}{z} \sqrt{\gamma^2 - 1} \end{cases} \quad (8)$$

Les bornes d'intégration sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_P = \sqrt{\frac{t^2}{t_P^2} - 1} \\ T_S = \gamma \sqrt{\frac{t^2}{t_S^2} - 1} \\ T_{PS} = \sqrt{\left(\frac{C_P}{R}(t - t_{PS}) + 1\right)^2 - 1} \\ A_{PS} = \begin{cases} T_S & \text{si } t > t_S \\ 0 & \text{si } t \leq t_S \end{cases} \end{array} \right. \quad (9)$$

Les fonctions complexes  $K_P$  et  $K_S$  s'écrivent comme suit ( $\imath$  est le nombre imaginaire unité):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_r^P(q, \eta) = \frac{-1}{\pi^2 C_P \mu} \frac{\imath q k_1}{k_5} \\ K_r^S(q, \eta) = \frac{2}{\pi^2 C_P \mu} \frac{\imath q k_3 k_4}{k_5} \\ K_z^P(q, \eta) = \frac{1}{\pi^2 C_P \mu} \frac{k_1 k_3}{k_5} \\ K_z^S(q, \eta) = \frac{-2}{\pi^2 C_P \mu} \frac{k_2 k_3}{k_5} \end{array} \right. \quad (10)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(q, \eta) = 2(q^2 + \eta^2) + \gamma^2 \\ k_2(q, \eta) = q^2 + \eta^2 \\ k_3(q, \eta) = \sqrt{q^2 + \eta^2 + 1} \\ k_4(q, \eta) = \sqrt{q^2 + \eta^2 + \gamma^2} \\ k_5(q, \eta) = k_1^2 - 4 k_2 k_3 k_4 \end{array} \right. \quad (11)$$

Les fonctions  $q^P$ ,  $q^S$  et  $q^{PS}$  dépendent de la variable d'intégration  $\eta$  et du temps  $t$ .

Pour  $t > t_P$

$$q^P(t, \eta) = \begin{cases} \frac{C_P}{R^2} [\imath t r + z t_P \sqrt{T_P^2 - \eta^2}] & \text{si } \eta \leq T_P \\ 0 & \text{si } \eta > T_P \end{cases} \quad (12)$$

Pour  $t > t_S$

$$q^T(t, \eta) = \begin{cases} \frac{C_P}{R^2} [\eta t r + z t_P \sqrt{T_S^2 - \eta^2}] & \text{si } \eta \leq T_S \\ 0 & \text{si } \eta > T_S \end{cases} \quad (13)$$

Pour  $t > t_{PS}$  et  $t < t_B$

$$q^{PS}(t, \eta) = \begin{cases} \frac{C_P}{R^2} [t r - z t_P \sqrt{\eta^2 - T_S^2}] & \text{si } A_{PS} \leq \eta \leq T_{PS} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (14)$$



## ANNEXE B : FONCTION DE GREEN IMPULSIONNELLE SUR L'AXE D'UN PISTON

Gakenheimer and Miklowitz ont calculé les fonctions de Green d'une source ponctuelle se déplaçant à la surface d'un solide semi-infini, élastique et isotrope. Les équations présentées dans cette annexe sont une adaptation à une dimension des fonctions de Green de l'annexe A. Elles donnent la composante longitudinale (selon l'axe  $z$ ) du champ de déplacements, lorsqu'ils sont induits par un piston ponctuel. La fonction de Green impulsionnelle sur l'axe du piston  $G_{ZZ}^0$  est la somme des composantes d'une onde de compression  $G_{ZZ}^P$  et d'une onde de cisaillement  $G_{ZZ}^S$ .

$$\begin{aligned} G_{ZZ}^0 &= G_{ZZ}^S + G_{ZZ}^P \\ G_{ZZ}^S &= -\frac{C_P}{\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ Y(t-t_s) t \frac{k_2^T k_3^T}{k_5^T} \right] \\ G_{ZZ}^P &= \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ Y(t-t_p) t \frac{k_1^L k_3^L}{k_5^L} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

où  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  et  $k_5$  sont donnés par (16) et (17):

$$\left\{ \begin{aligned} k_1^S &= \gamma^2 \left( \frac{2t^2}{t_s^2} - 1 \right) \\ k_2^S &= \gamma^2 \left( \frac{t^2}{t_s^2} - 1 \right) \\ k_3^S &= \sqrt{\gamma^2 \left( \frac{t^2}{t_s^2} - 1 \right) + 1} \\ k_4^S &= \gamma \frac{t}{t_s} \\ k_5^S &= (k_1^S)^2 - 4 k_2^S k_3^S k_4^S \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_1^P &= \left( \frac{2t^2}{t_p^2} - 1 \right) + \gamma^2 \\ k_2^P &= \left( \frac{t^2}{t_p^2} - 1 \right) \\ k_3^P &= \frac{t}{t_p} \\ k_4^P &= \sqrt{\frac{t^2}{t_p^2} - 1 + \gamma^2} \\ k_5^P &= (k_1^P)^2 - 4 k_2^P k_3^P k_4^P \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$C_p$  : vitesse de l'onde de compression

$z$  : profondeur selon l'axe de la source ponctuelle

$\mu$  : coefficient de Lamé d'élasticité de cisaillement

$Y(t-t_i)$  : fonction de Heaviside

$t_s$  : temps d'arrivée des ondes de cisaillement

$t_p$  : temps d'arrivée des ondes de compression

$\gamma = C_p/C_s$

## ANNEXE C : EXPRESSION APPROCHÉE DE LA FONCTION DE GREEN SUR L'AXE D'UN PISTON

A partir de l'expression exacte de la fonction de Green sur l'axe d'un piston (voir annexe B), une solution approchée peut être calculée autour des temps caractéristiques que sont les temps d'arrivée des ondes de compression et de cisaillement:

Pour  $t \sim t_P$ , on pose  $\varepsilon = \frac{t^2}{t_P^2} - 1$  et on développe au premier ordre:

$$\begin{cases} k_1^P \approx \gamma^2 \\ k_2^P \approx \varepsilon \\ k_3^P = 1 \\ k_4^P \approx \gamma \\ k_5^P = \gamma^4 \end{cases} \quad (18)$$

alors,  $G_{ZZ}^P$  la réponse impulsionnelle suivant  $z$  (solution irrotationnelle de l'équation de propagation) s'écrit:

$$G_{ZZ}^P \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{Y(t-t_P) t \gamma^2}{\gamma^4} \right] \quad (19)$$

$$\boxed{G_{ZZ}^P \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \left[ \frac{\delta(t-t_P)t}{\gamma^2} + \frac{Y(t-t_P)}{\gamma^2} \right]} \quad (20)$$

Pour  $t \sim t_S$ , on pose  $\varepsilon = \frac{t^2}{t_S^2} - 1$  et on développe au premier ordre:

$$\begin{cases} k_1^S \approx \gamma^2 \\ k_2^S \approx \gamma^2 \varepsilon \\ k_3^S \approx 1 \\ k_4^S \approx \gamma \\ k_5^S \approx \gamma^4 \end{cases} \quad (21)$$

alors,  $G_{ZZ}^S$  la réponse impulsionnelle suivant  $z$  (solution à divergence nulle de l'équation de propagation) s'écrit:

$$\boxed{G_{ZZ}^S \approx -\frac{C_P}{\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{Y(t-t_S) t \gamma^2 \varepsilon}{\gamma^4} \right] \approx -\frac{C_P}{\pi \mu z^2} \frac{2 Y(t-t_S)}{\gamma^2}} \quad (22)$$

Pour  $t \gg t_s \gg t_p$  (en dehors des temps caractéristiques), on pose  $\varepsilon = \frac{t_p}{t}$  et on développe au premier ordre les termes concernant l'onde de compression:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^P \approx \frac{2}{\varepsilon^2} + \gamma^2 \\ k_2^P \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \\ k_3^P \approx \frac{1}{\varepsilon} \\ k_4^P \approx \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{2} \right) \\ k_5^P = \frac{2\gamma^2}{\varepsilon^2} \end{array} \right. \quad (23)$$

alors,  $G_{ZZ}^P$  devient:

$$G_{ZZ}^P \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{Y(t-t_p)t}{\gamma^2 \varepsilon} \right] = \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{Y(t-t_p)t^2}{\gamma^2 t_p} \right] \quad (24)$$

Loin du temps caractéristique  $t_L$ , on ne peut pas retenir le terme  $\delta(t-t_p)$ . Il reste:

$$\boxed{G_{ZZ}^P \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} Y(t-t_p) \frac{2t}{\gamma^2 t_p}} \quad (25)$$

En ce qui concerne l'onde de cisaillement, toujours dans le cas où  $t \gg t_s$ , on pose  $\varepsilon = \frac{t_s}{t}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1^S \approx \gamma^2 \left( \frac{2}{\varepsilon^2} - 1 \right) \\ k_2^S \approx \gamma^2 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right) \\ k_3^S \approx \frac{\gamma}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \\ k_4^S \approx \frac{\gamma}{\varepsilon} \\ k_5^S \approx \gamma^4 \left( \frac{2}{\varepsilon^2} - 1 \right) \end{array} \right. \quad (26)$$

$G_{ZZ}^S$  a pour expression approchée:

$$G_{ZZ}^S \approx -\frac{C_P}{\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{Y(t-t_s)t}{2\gamma \varepsilon} \right] = -\frac{C_P}{\pi \mu z^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{Y(t-t_s)t^2}{2\gamma t_s} \right] \quad (27)$$

Loin du temps caractéristique  $t_s$ , on ne peut pas retenir le terme  $\delta(t-t_s)$ . Il reste:

$$G_{ZZ}^S \approx -\frac{C_P}{2\pi \mu z^2} Y(t-t_s) \frac{2t}{\gamma t_s} \quad (28)$$

Or  $\gamma = \frac{C_P}{C_S} = \frac{t_s}{t_p}$ , par conséquent  $G_{ZZ}^S$  peut encore s'écrire:

$$\boxed{G_{ZZ}^S \approx -\frac{C_P}{\pi \mu z^2} Y(t-t_s) \frac{t}{\gamma^2 t_p}} \quad (29)$$

Les expressions approchées (20), (22), (25) et (29) sont maintenant réunies dans l'équation (32) qui constitue une approximation des fonctions de Green:

$$G_{ZZ}^P \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \left[ \delta(t-t_p) \frac{t}{\gamma^2} + \frac{Y(t-t_p)}{\gamma^2} + Y(t-t_p) \frac{2t}{\gamma^2 t_p} \right] \quad (30)$$

$$G_{ZZ}^S \approx -\frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \left[ Y(t-t_s) \frac{2t}{\gamma^2 t_p} + \frac{4Y(t-t_s)}{\gamma^2} \right] \quad (31)$$

$$G_{ZZ} \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z^2} \left\{ \delta(t-t_p) \frac{t}{\gamma^2} + [Y(t-t_p) - Y(t-t_s)] \frac{2t}{\gamma^2 t_p} - \frac{4Y(t-t_s)}{\gamma^2} + \frac{Y(t-t_p)}{\gamma^2} \right\} \quad (32)$$

En ce qui concerne la vitesse particulaire, on obtient:

$$\boxed{\frac{\partial G_{ZZ}}{\partial t} \approx \frac{C_P}{2\pi \mu z} \left\{ \delta'(t-t_p) \frac{t}{\gamma^2} + [Y(t-t_p) - Y(t-t_s)] \frac{2}{\gamma^2 t_p} + [\delta(t-t_p) - \delta(t-t_s)] \frac{2t}{\gamma^2 t_p} - \frac{4\delta(t-t_s)}{\gamma^2} + \frac{\delta(t-t_p)}{\gamma^2} \right\}} \quad (33)$$

## ANNEXE D : CONVOLUTION DE L'EXPRESSION APPROCHÉE DE LA FONCTION DE GREEN AVEC UNE SINUSOÏDE

Soit  $S_{ZZ}$  la composante longitudinale de la vitesse particulière sur l'axe d'un piston vibrant sinusoïdalement à la surface d'un solide élastique semi-infini.  $S_{ZZ}$  se calcule en faisant le produit de convolution de la fonction de Green par une sinusoïde:

$$S_{ZZ} = \frac{\partial G_{ZZ}}{\partial t} \otimes \sin(\omega t)$$

$$S_{ZZ} = \frac{C_P}{2\pi \mu z} \left\{ \delta'(t-t_P) \frac{t}{\gamma^2} + [Y(t-t_P) - Y(t-t_S)] \frac{2}{\gamma^2 t_P} + [\delta(t-t_P) - \delta(t-t_S)] \frac{2t}{\gamma^2 t_P} - \frac{4\delta(t-t_S)}{\gamma^2} + \frac{\delta(t-t_P)}{\gamma^2} \right\}$$

$$\otimes \sin(\omega t)$$
(34)

Le développement de (34) conduit au calcul de ces trois produits de convolution:

- $[Y(t-t_P) - Y(t-t_S)] \otimes \sin(\omega t) = \int_{t_P}^{t_S} \sin \omega(t-\tau) d\tau$
- $[Y(t-t_P) - Y(t-t_S)] \otimes \sin(\omega t) = \frac{-1}{\omega} [\cos \omega(t-t_S) - \cos \omega(t-t_P)]$
- $\delta(t-t_S)t \otimes \sin(\omega t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)(\tau+t_S) \sin \omega(t-\tau-t_S) d\tau$
- $\delta(t-t_S)t \otimes \sin(\omega t) = t_S \sin \omega(t-t_S)$
- $\delta'(t-t_P)t \otimes \sin(\omega t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau)(\tau+t_P) \sin \omega(t-\tau-t_P) d\tau$
- $\delta'(t-t_P)t \otimes \sin(\omega t) = -[\sin \omega(t-t_P) - \omega t_P \cos \omega(t-t_P)]$

Alors la solution analytique approchée peut s'écrire comme:

$$s(t) = \frac{C_P}{2\pi \mu z^2 \gamma^2} \left\{ \omega t_P \cos \omega(t-t_P) - 2\gamma \sin \omega(t-t_S) + \frac{2\gamma}{\omega t_S} [\cos \omega(t-t_S) - \cos \omega(t-t_P)] \right\}$$

Dans cette expression finale, nous avons négligé les termes du second ordre.

## ANNEXE E : INVERSION DES EQUATIONS DE LA VITESSE ET DE L'ATTENUATION DU MODELE DE KELVIN-VOIGT

Pour caractériser la réponse d'un matériau à des sollicitations mécaniques, on utilise des modèles rhéologiques qui combinent des éléments élastiques (ressort) et des éléments dissipatifs (patin visqueux). Ces éléments peuvent être assemblés en une infinité de combinaisons. Le modèle de Kelvin-Voigt figure parmi les modèles rhéologiques les plus simples. Il est utilisé habituellement pour caractériser les milieux biologiques comme les tissus mous. Pour une onde de cisaillement se propageant dans un milieu obéissant à la rhéologie de ce modèle, il est possible de calculer théoriquement sa vitesse et son atténuation (voir paragraphe III-3). Le jeu d'équations (35), donne la vitesse  $C_s$  et l'atténuation  $\alpha_s$  en fonction de la masse volumique  $\rho$  du milieu de propagation, de la fréquence angulaire  $\omega$  de l'onde de cisaillement et des coefficients d'élasticité  $\mu_1$  et de viscosité  $\mu_2$  de cisaillement. Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues; la masse volumique  $\rho$  est connue (environ  $1100 \text{ g.cm}^{-3}$  pour les muscles) et la fréquence angulaire  $\omega$  est fixée expérimentalement. Les deux inconnues sont  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Il est possible d'inverser ce jeu d'équation de manière à obtenir les paramètres viscoélastiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en fonction de la vitesse et de l'atténuation de l'onde de cisaillement. C'est l'objet des calculs suivant.

$$\begin{cases} C_s = \sqrt{\frac{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}{\rho (\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2})}} \\ \alpha_s = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 (\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2} - \mu_1)}{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}} \end{cases} \quad (35)$$

En élevant au carré (35) il vient:

$$\begin{cases} C_s^2 = \frac{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)}{\rho (\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2})} \\ \alpha_s^2 = \frac{\rho \omega^2 (\sqrt{\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2} - \mu_1)}{2(\mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2)} \end{cases} \quad (36)$$

Si on pose  $X^2 = \mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2$  on obtient :

$$\begin{cases} \rho (\mu_1 + |X|) C_s^2 = 2X^2 \\ 2X^2 \alpha_s^2 = \rho \omega^2 (|X| - \mu_1) \end{cases} \quad (37)$$

Une autre façon d'écrire ce système d'équations est :

$$\begin{cases} \frac{2X^2}{C_s^2} - \rho \mu_1 = \rho |X| \\ \frac{2X^2 \alpha_s^2}{\omega^2} + \rho \mu_1 = \rho |X| \end{cases} \quad (38)$$

La somme de ces équations donne:

$$X^2 = \frac{\rho \mu_1}{(\frac{1}{C_s})^2 - (\frac{\alpha_s}{\omega})^2} \quad (39)$$

A présent, on injecte cette expression dans l'une des deux équations de (38) (par exemple la première). On obtient après quelques lignes de calcul:

$$\mu_1 = \frac{\rho C_s^2}{\left(1 - \left(\frac{\alpha_s C_s}{\omega}\right)^2\right) \left(\frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha_s C_s}{\omega}\right)^2} - 1\right)^2} \quad (40)$$

Sachant que  $X^2$  vérifie à la fois (39) et  $X^2 = \mu_1^2 + \omega^2 \mu_2^2$ , on aboutit à:

$$\mu_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\rho \mu_1 C_s^2}{1 - \left(\frac{\alpha_s C_s}{\omega}\right)^2} - \mu_1^2} \quad (41)$$

Finalement, en remplaçant  $\mu_1$  par son expression (40) on a finalement:

$$\mu_2 = \frac{\rho C_s^2}{\omega} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha_s C_s}{\omega}\right)^2} - 1\right)}{\left(1 - \left(\frac{\alpha_s C_s}{\omega}\right)^2\right) \left(\frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha_s C_s}{\omega}\right)^2} - 1\right)^2}} \quad (42)$$

Les équations (40) et (42) donnent donc les coefficients de Lamé  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en fonction de la vitesse et de l'atténuation de l'onde de cisaillement que l'on peut calculer expérimentalement.



## **Résumé**

*L'objectif de ce travail est de réaliser un outil de mesure de l'élasticité des milieux biologiques. L'idée est d'employer les ultrasons pour détecter des ondes de cisaillement générées par un « coup » acoustique de basse fréquence (10-500 Hz) au moyen d'un piston. Cette onde contient des informations sur la nature viscoélastique du solide dans lequel elle se propage. Si les ultrasons dans les milieux biologiques sont bien maîtrisés, ce n'est pas le cas des ondes de cisaillements. Par conséquent la réalisation de cet outil nécessite une meilleure compréhension des ondes de basse fréquence. Dans ce manuscrit, nous montrons que les mesures effectuées par les méthodes ultrasonores actuelles fondées sur le même principe (sonoélasticité), subissent des effets de réflexions d'ondes aux frontières, de diffraction et d'interférence avec une onde longitudinale de basse fréquence. Afin de nous affranchir de ces phénomènes, nous avons élaboré une méthode appelée « élastographie impulsionnelle ». Appliquée à un fantôme d'agar-gélatine, à un muscle et à un produit laitier, elle permet de détecter des ondes de cisaillement se propageant aux vitesses respectives de 2.7, 5.3 et 0.5 m.s<sup>-1</sup>. L'élasticité de cisaillement et la viscosité de cisaillement sont déduites des mesures de vitesse et d'atténuation de l'onde. Nous montrons enfin que les ondes de basse fréquence sont détectées en champ proche ou en champ intermédiaire. Les diagrammes de directivité de Miller et Pursey en champ lointain sont moins aptes à rendre compte du champ de déplacement que les fonctions de Green dans les solides. L'ensemble des résultats contenus dans ce mémoire autorise à penser que l'élastographie impulsionnelle puissent devenir un outil utile en rhéologie et en médecine.*

### **Abstract**

*Several methods have been proposed to estimate the viscoelastic properties of soft biological tissues using forced low frequency vibrations (10-500Hz). Those methods are based on the measurement of phase velocity of the shear waves using ultrasound. This thesis shows that the measurements of velocity as well as attenuation are subjected to bias. Those bias are related to reflected waves created on boundaries, to the non negligible size of the piston source which causes diffraction effects and to the influence of a low frequency longitudinal wave. Indeed, a theoretical analysis of the field radiated by a point source explains how mechanic vibrations of a piston generates a transverse wave with a longitudinal component and how this component can interfere with a low frequency longitudinal wave. However, by using a low frequency transient excitation, those bias can be avoided. This method, the « Transient Elastography », is applied to an agar-gelatin phantom, to a muscle and to a dairy produce; the shear wave velocities are found to be 2.7, 5.3 and 0.5 m.s<sup>-1</sup>. Then the precise numerical values of elasticity and viscosity can be deduced. However, generation of shear waves by acoustic vibrators is a relatively complex problem and the directivity pattern of shear waves produced by usual vibrators are more complicated than those obtained for longitudinal ultrasonic transducers. In order to extract shear modulus parameters from the shear wave propagation in soft tissues, it is important to understand and to optimize the directivity pattern of shear wave vibrators. This thesis is devoted in the second part to a careful studying of the theoretical and the experimental directivity pattern produced by a point source in soft tissues. Both theoretical and experimental measurements show that the directivity pattern of a point source vibrator presents two very strong lobes for angle around 35°. This second part also point out the impact of the near field in the problem of shear wave generation. The whole results show that transient elastography may be very useful in rheology and in medecine.*